

OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO: APLICAÇÕES NO IBRX50
OPTIMIZATION OF INVESTMENT PORTFOLIOS: APPLICATIONS IN IBRX50

ALTIERES FRANCES SILVA¹

RAINER SILVA DE OLIVEIRA²

KARÉM CRISTINA DE SOUSA RIBEIRO³

RESUMO

A decisão de realizar investimentos no mercado de ações envolve fatores pessoais do investidor, como sua disposição ao risco e sua expectativa de retornos. Considerando-se a relevância informacional do IBRX50, carteira teórica da bolsa de valores do Brasil (B3), e a importância de se otimizar portfólios para que gerem melhores resultados, este artigo teve por objetivo verificar a eficiência das ações pertencentes ao referido índice para a composição de um portfólio otimizado. Para isso, foram criadas e comparadas três carteiras a partir das companhias pertencentes ao IBRX50: a primeira pela abordagem de Sharpe; a segunda obtida pelo DEA; e a terceira associando a DEA à abordagem de Sharpe. Os resultados demonstraram que, considerando o período de julho de 2017 a junho de 2018, todas as carteiras formadas tiveram retornos superiores ao Ibovespa e ao IBRX50. Do mesmo modo, coube destacar que a carteira Sharpe foi a única com desempenho superior a esses índices ao longo de todo o período analisado. Esses resultados corroboram para a demonstração da relevância dessa abordagem na otimização dos investimentos. A Análise Envoltória dos Dados, ou DEA, apresentou-se como uma ferramenta de relevância para o objetivo proposto.

Palavras-chave: Otimização de carteira; Análise Envoltória dos Dados; Solver.

ABSTRACT

The decision to invest in the stock market involves personal factors of the investor, such as his willingness to risk and his expectation of returns. Considering the informational relevance of the IBRX50, the theoretical portfolio of the Brazilian stock exchange (B3), and the importance of optimizing portfolios to generate better results, this article aimed to verify the efficiency of the shares belonging to said index for the composition of an optimized portfolio. Three portfolios were created and compared from the companies belonging to the IBRX50: the first by Sharpe's approach; the second one obtained by the DEA; and the third associating the DEA to Sharpe's approach. The results showed that, considering the period from July 2017 to June 2018, all portfolios formed had higher returns than the Ibovespa and the IBRX50. In the same way, it should be noted that the Sharpe portfolio was the only one with performance above these indices throughout the analyzed period. These results corroborate the demonstration of the relevance of this approach in the optimization of investments. Data Envelopment Analysis, or DEA, was presented as a relevant tool.

Keywords: Portfolio optimization; Data Envelopment Analysis; Solver.

1- Mestrando em administração pela FAGEN/UFU. Técnico-administrativo em educação na UFU. E-mail: altieresf@gmail.com

2- Mestrando em administração pela FAGEN/UFU. E-mail: admraimer@yahoo.com.br

3- Doutora em administração pela USP. Professora do Programa de Pós-Graduação em Administração - FAGEN/UFU. E-mail: kribeiro@ufu.br

1. INTRODUÇÃO

A decisão de realizar investimentos no mercado de ações envolve fatores pessoais do investidor, como sua disposição ao risco e sua expectativa de retornos. São recorrentes os debates na literatura da teoria de finanças sobre o mercado ser eficiente, conforme o trabalho seminal de Fama (1970), sendo essa hipótese contraposta pelos defensores das finanças comportamentais, como Shefrin (2007) e Shiller (2015), além de outras abordagens, como a dos mercados adaptativos, que tenta conciliar os extremos sobre a racionalidade ou não do mercado (LO, 2004). Não obstante essas discussões, elas somente são possíveis por haver investidores, componentes dos mercados. Assim, a decisão por investir é a gênese desses debates.

Ao se considerar o longo prazo, a aplicação de recursos no mercado acionário mostra-se uma alternativa interessante frente a outras opções de investimento. A oportunidade de se obter ganhos superiores, contudo, é acompanhada por um maior risco, de modo que, “objetivando a maximização do retorno, o investidor deve buscar as melhores formas de aplicar seu capital, evitando riscos maiores do que está disposto a aceitar” (ROTELA JUNIOR; PAMPLONA; SALOMON, 2014, p. 406). Em momentos de instabilidade econômica, além da análise quanto aos riscos, os prazos e os retornos esperados, torna-se também necessário atentar-se para a maior instabilidade do mercado em virtude do ambiente de incertezas (SOUZA et al., 2017).

Tendo como fundamento um comportamento em que o investidor busca a redução dos riscos e o aumento dos retornos, as carteiras de investimento em ativos, ou portfólios, são um meio para a diversificação das aplicações, na tentativa de diminuir os riscos e gerar melhores retornos. A obra de Markowitz (1952), que originou a Teoria do Portfólio, analisa a formação de carteiras com base na ponderação dos ativos que a compõe, objetivando otimizar os retornos, e é uma das bases sobre as quais a teoria de finanças tem se desenvolvido desde então.

Esse processo de otimização de carteiras visa a análise e adequação da participação dos ativos no portfólio para o aumento dos retornos, dado determinado risco aceito pelo investidor. Dentre os recursos utilizados para a verificação do desempenho dos portfólios, fator que auxilia em sua otimização, pode-se citar o Índice de Sharpe (SHARPE, 1964), que apresenta o retorno da carteira para cada unidade de risco assumido, possibilitando a identificação da melhor opção em relação aos retornos.

De acordo com Sauer (1997), esse índice aponta uma medida de desempenho ajustada ao risco, gerando informações substanciais a investidores diversificados. Comumente, ele tem sido utilizado em pesquisas que trataram do desempenho de carteiras (ZAKAMOULINE; KOEKEBAKKER, 2009; GASPAR; SANTOS; RODRIGUES, 2015; SANTIAGO; LEAL, 2015; SERRA; NAKAMURA, 2016; BESSLER; OPFER; WOLFF, 2017; CHEONG et al., 2017).

Ao analisarem a evolução dos estudos sobre a Teoria do Portfólio, Araújo e Montini (2015, p. 209) constataram “que o desenvolvimento de novas formas de otimizar carteiras de investimentos viabilizadas pela grande capacidade computacional traz novos dilemas e questões para os gestores de carteiras”. Uma dessas novas formas é a Análise Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis* – DEA), originalmente proposta por Charnes, Cooper e Rhodes (1978).

Na definição de Lopes, Carneiro e Schneider (2010, p. 643), a DEA “é uma técnica de mensuração de desempenho que tem como objetivo principal determinar a eficiência relativa de unidades de produção considerando sua proximidade à uma fronteira de eficiência”. Por meio de programação linear, o modelo gera um indicador de eficiência produzido a partir de

abordagens de desempenho distintas. Essa abordagem tem sido aplicada na análise de diferentes mercados, como o chinês (LIU et al., 2015), o brasileiro (ROTELA JUNIOR et al., 2015), o iraniano (MASHAYEKHI; OMRANI, 2016) e o norte-americano (TARNAUD; LELEU, 2018).

A bolsa de valores do Brasil (B3), por meio de índices formados a partir de carteiras teóricas de companhias que a compõem, apresenta parâmetros para a análise e interpretação do mercado. Dentre essas carteiras, a IBrX50 representa o índice de desempenho para os 50 ativos de maior negociabilidade e representatividade da B3. Assim, é uma carteira diversificada, composta por ativos dos diversos setores econômicos.

Nesse sentido, considerando-se a relevância informacional das carteiras teóricas da B3, em especial o IBrX50, e a importância de se otimizar portfólios para que gerem melhores resultados, este artigo teve por objetivo verificar a eficiência das ações pertencentes ao referido índice para a composição de um portfólio otimizado. Para isso, foram criadas e comparadas três carteiras a partir das companhias pertencentes ao IBrX50: a primeira obtida pela abordagem de Sharpe; a segunda composta pelas empresas consideradas eficientes pelo modelo DEA; e a terceira por meio da aplicação da abordagem de Sharpe às companhias consideradas eficientes pelo modelo DEA.

Esta pesquisa justifica-se por contribuir com a teoria relacionada à gestão de investimentos, especialmente por desenvolver sua análise baseada na carteira do IBrX50, visto que parte significativa dos estudos pela perspectiva proposta focam-se no Ibovespa (ROTELA JUNIOR; PAMPLONA; SALOMON, 2014; BACH et al., 2015; ROTELA JUNIOR et al., 2015; SOUZA et al., 2017; ALEXANDRINO et al., 2017). A aplicação das ferramentas de análise sugeridas também pode auxiliar os investidores nas tomadas de decisão.

Além desta introdução, a segunda seção apresenta o referencial teórico, no qual constam as referências relacionadas à otimização de carteiras e à Análise Envoltória dos Dados (DEA). Por sua vez, a metodologia é apresentada na terceira seção. Na quarta seção são analisados os resultados e por fim, na quinta seção, são realizadas as considerações finais.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção são apresentados aspectos teóricos concernentes ao tema da pesquisa. Primeiramente, será apresentada a literatura sobre a otimização de carteiras de investimento. Em seguida, apontamentos sobre o método da Análise Envoltória dos Dados.

2.1 Otimização de carteiras de investimento

A atual teoria sobre a composição de portfólios parte do trabalho de Markowitz (1952), que propôs a otimização de carteiras com base na média, na variância e na covariância dos retornos das ações, tomando como estimadores as séries históricas, caracterizando-se os riscos e retornos esperados. O objetivo é, por meio da diversificação de ativos, gerar a máxima eficiência da carteira.

Conforme apresentado por Assaf Neto (2010), o risco da carteira depende da covariância entre os ativos e é representado pelo desvio-padrão. O risco de uma carteira com n ativos pode ser calculado conforme a equação 1:

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^N W_i^2 \times \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_i W_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j \right]^{1/2}$$

(1)

A diversificação proposta pelo modelo de Markowitz, também conhecido como modelo de média-variância, baseia-se na obtenção de coeficientes de correlação extremos entre os ativos, o que permite a redução do risco diversificável. Este risco é aquele inerente a determinado ativo e que pode ser reduzido ao se inserir na carteira um ativo com comportamento contrário (correlação negativa). O risco sistemático, por sua vez, é não diversificável, pois refere-se a fatores externos às decisões de investimento.

O retorno da carteira é obtido pela média ponderada dos retornos esperados para cada ativo pelo respectivo percentual de participação desses ativos no portfólio, de acordo com o apresentado na equação 2:

$$Re = \sum_{i=0}^N W_i X_i \quad (2)$$

Conforme verificado por Bloomfield, Leftwich e Long (1977), nas primeiras décadas de estudos sobre a teoria de Markowitz, a otimização das carteiras por meio dos pesos de participação dos ativos incorria em custos maiores que os benefícios gerados dada a complexidade dos cálculos. Nos anos seguintes, contudo, os custos computacionais reduziram, bem como as dificuldades operacionais para a otimização das carteiras.

Um dos meios para se analisar o desempenho das carteiras é utilizando o Índice de Sharpe, o qual possibilita verificar a relação entre o risco e o retorno dos investimentos. Em outras palavras, esse índice demonstra o retorno obtido pelo risco adicional incorrido, sendo este a diferença entre o risco da carteira e o de um ativo livre de risco. Ele é obtido por meio da equação 3:

$$Sp = \frac{Rp - R_{Rf}}{\sigma_p} \quad (3)$$

Em que:

Sp = Índice de Sharpe para o portfólio "P";

R_p = Retorno do portfólio "P";

R_{Rf} = Retorno do ativo livre de risco "Rf";

σ_p = Desvio padrão das taxas de retorno do Portfólio "P".

Essa abordagem tem sido utilizada tanto para a análise de carteiras quanto para sua otimização. Zakamouline e Koekebakker (2009) propuseram uma medida de desempenho para portfólios em períodos de alta distribuição de lucros, introduzindo o conceito de "preferências relativas". Para isso, analisaram aspectos como a alocação ideal de capital e derivaram o índice Sharpe considerando uma assimetria ajustada.

Santiago e Leal (2015) investigaram carteiras ingênuas, ou seja, igualmente ponderadas, focando a análise nas pequenas carteiras, de investidores sem sofisticação. Considerando os ativos do Ibovespa, o ordenamento das carteiras criadas deu-se com base na abordagem de Sharpe. Por sua vez, Gaspar, Santos e Rodrigues (2015) analisaram empresas do setor imobiliário com ações negociadas na B3 no período de 2009 a 2012. O desempenho dos ativos foi avaliado com base em modelos quantitativos de desempenho, como o Índice de Sharpe, Índice de Treynor, CAPM, Alfa de Jensen e Índice de Modigliani e Modigliani. Em seguida, compuseram uma carteira com cinco ativos e compararam seu desempenho com os ativos individualizados e com o índice de mercado.

Serra e Nakamura (2016) compuseram um portfólio Tobin para analisar se seu desempenho seria superior ao desempenho do "Novo Ibovespa", em relação ao retorno e à

variância. Utilizaram o Índice de Sharpe para a comparação de desempenho, constatando que, para todos os 34 quadriênios verificados, o portfólio T mostrou-se superior ao "Novo Ibovespa". Já Bessler, Opfer e Wolff (2017) utilizaram o modelo de Black-Litterman para melhorar a otimização de carteiras de média-variância padrão. Os portfólios foram comparados pelo Índice de Sharpe e os autores identificaram que, para investidores conservadores, com portfólios semelhantes ao utilizado para o estudo, as carteiras apresentavam melhor performance.

Cheong et al. (2017), por fim, apresentaram um modelo de otimização de portfólios em *clustering*, com emprego de algoritmos genéticos (GA). O portfólio formado após a aplicação do GA mostrou ter um melhor desempenho, com base nos riscos, retornos e no Índice de Sharpe. Verifica-se, assim, que a abordagem de Sharpe é utilizada de modo amplo, seja para a análise do desempenho de carteiras, seja para a otimização destas.

2.2 Análise Envoltória dos Dados

Charnes, Cooper e Rhodes (1978) propuseram a *Data Envelopment Analysis – DEA* –, ou Análise Envoltória dos Dados, para a verificação da eficiência de serviços públicos. Com o transcorrer do tempo, o modelo foi adotado por outras áreas, inclusive pelas finanças, onde é utilizado, dentre outros fins, para a otimização de carteiras.

As *Decision Making Units* (DMUs) são as medidas de eficiência, obtidas por meio dos *inputs* e *outputs* utilizados e traduzidas para um único indicador, gerado por diferentes abordagens de desempenho e orientando a tomada de decisão. De acordo com Vogt, Degenhart e JUNIOR (2018, p.118), “o marcador para a eficiência de uma DMU é definido como a relação máxima entre a soma ponderada das entradas para a soma ponderada das saídas, com a condição de ser menor ou igual a um”.

Essa condição está expressa no modelo DEA-BCC, um aprimoramento proposto por Charnes, Cooper e Rhodes (1978). Diferentemente do modelo CCR, estabelecido por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), o modelo BCC “inclui os retornos das variáveis de escala, estima a eficiência técnica pura em relação a uma escala de operações e identifica ganhos de escala crescente, decrescente e constante” (BACH et al., 2015, p.37). A equação 4 apresenta esse modelo, o qual foi utilizado no presente estudo:

$$W_0 = \max \sum_{r=1}^s u_r \cdot y_{r0} \quad (4)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1 \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} - \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} + c_0 \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$u_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, s$$

Em que:

$j = 1, \dots, n$ represente o índice da DMU; $r =$ índice de saída; $i =$ índice de entrada; y_{rj} = valor da r -ésima saída para a j -ésima DMU; x_{ij} = valor da i -ésima entrada para a j -ésima DMU; u_r = peso associado à r -ésima saída; v_i = peso associado à i -ésima entrada; w_0 = eficiência relativa da DMU₀; e y_{r0} e x_{r0} = coeficientes tecnológicos das matrizes das saídas e entradas, respectivamente.

Lopes, Carneiro e Schneider (2010) aplicaram o modelo DEA para a formação de carteiras com companhias da, até então, Bovespa. As carteiras foram otimizadas com base no RAGC, v.7, n.27, p.73-88/2019

modelo de Markowitz, gerando-se uma nova carteira que se mostrou detentora de um desempenho melhor que o Ibovespa e que o portfólio DEA original.

Rotela Junior, Pamplona e Salomon (2014) trabalharam com as 40 empresas com maior participação no Ibovespa. Criaram e compararam carteiras otimizadas pela abordagem de Sharpe, pelo modelo DEA-BCC, e por uma carteira DEA-BCC otimizada pela abordagem de Sharpe. Concluíram que esta última, que combinou ambos os modelos, apresentou melhor desempenho que as demais. Já Rotela Junior et al. (2015) afirmam que a abordagem de Sharpe pode recomendar muitos ativos para a carteira, com percentuais de participação difíceis de serem obtidos. Assim, utilizaram o modelo CC-DEA para a identificação de ativos eficientes para, então aplicarem a abordagem de Sharpe. Para os autores, esse modelo aumenta a viabilidade da carteira.

Com a justificativa de testar se linearidade dos modelos clássicos da DEA são condizentes com o esperado para a aplicação dos modelos de diversificação de ativos, Liu et al. (2015) realizaram simulações para a aplicação desses testes. Concluíram que o DEA tem, de fato, a capacidade de gerar uma carteira diversificável e eficiente, caso os dados do modelo sejam escolhidos corretamente. Por fim, Tarnaud e Leleu (2018) demonstraram como o uso do retorno médio, variância e momentos de maior ordem nos *outputs* do modelo DEA resultam numa classificações mais consistentes dos portfólios.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa desenvolvida caracterizou-se como descritiva, com abordagem quantitativa e dados obtidos por meio bibliográfico e documental, conforme classificação de Sellitz (1960). Com a finalidade de se identificar os ativos pertencentes ao IBRX50 a serem selecionados para a composição de uma carteira otimizada, procedeu-se à comparação entre três carteiras obtidas pela abordagem de Sharpe, pela DEA e pela associação entre ambos os modelos.

Os dados da pesquisa foram obtidos por meio da base de dados Economatica e pelos *sites* da B3 e do Tesouro Nacional. Para a otimização das carteiras utilizou-se o *Solver*, ferramenta de programação linear integrado ao *software* Excel. O uso dessa ferramenta pode ser observado em estudos anteriores, como em Oliveira et al. (2011), Rotela Junior et al. (2015), Bach et al. (2015), Souza et al. (2017), dentre outros. A fórmula funcional de otimização aplicada por essa ferramenta pode ser verificada por meio da equação 5, em consonância com o exposto por Souza et al. (2017):

$$Maximize RRR = \frac{\sum_{j=1}^{48} x_j \cdot r_j}{\left[\sum_{i=1}^{48} \sum_{j=1}^{48} x_i \cdot x_j \cdot CORR_{ij} \right]^{1/2}} \quad (5)$$

sujeito a $x_j \geq 0$
 $x_j \leq 1$

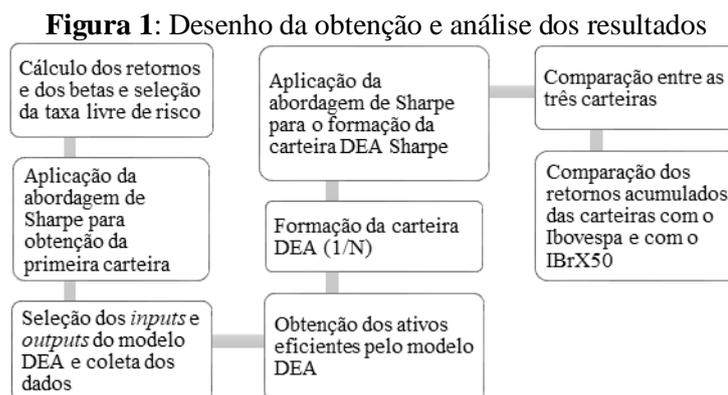
$$\sum_{j=1}^{48} x_j = 1 \quad (i \in j = 1, 2, 3, 4, \dots, 48)$$

Em que: x_j é a proporção do valor total da carteira aplicada no ativo j; x_i é a participação de cada ativo; r_j é a média de retorno do ativo j; $CORR_{ij}$ é a correlação entre o retorno dos ativos i e j.

Apesar de o IBrX50 ser composto por 50 ativos, dois foram excluídos por não apresentarem os dados para todo o período analisado, o que levaria a distorções nos resultados: Rumo S.A e Suzano Papel.

Considerou-se como taxa livre de risco o título do Tesouro Nacional prefixado com vencimento em janeiro de 2019, cuja rentabilidade percentual para os últimos trinta dias era de 0,70%. O modelo DAE foi rodado por meio do *software* Win4Deap2 e as matrizes de covariância, os coeficientes de correlação e as regressões pelo método dos mínimos quadrados, para a obtenção dos betas, foram obtidos por meio do *software* Stata.

A figura 1 apresenta o processo de obtenção e análise dos resultados:



Fonte: elaborado pelos autores.

Inicialmente, obteve-se o preço mensal das ações dos ativos componentes do IBrX50 para o período de julho de 2015 a junho de 2018. Foi considerada a composição do índice referente ao quadrimestre de abril a agosto de 2018. O período de 36 meses foi escolhido com base na literatura sobre a utilização do DEA, como Lopes, Carneiro e Schneider (2010) e Rotela Junior, Pamplona e Salomon (2014), sendo utilizado em todas as abordagens aplicadas com o fim de manter o nível de comparação entre as carteiras.

As cotações logarítmicas foram utilizadas na regressão por mínimos quadrados, por meio da qual se obteve os betas. Após a composição da matriz de covariância, foi possível compor a primeira carteira, otimizada pelo *Solver*, denominada carteira Sharpe. Em seguida procedeu-se à obtenção dos dados utilizados como *input* (preço/lucro e volatilidade em 12, 24 e 36 meses) e *output* (lucro por ação e rentabilidade em 12, 24 e 36 meses) do modelo DEA, conforme proposto por Rotela Junior Pamplona e Salomon (2014). Também em conformidade com estes autores, e por se tratarem de empresas de diferentes setores, o modelo DEA aplicado neste estudo foi o BCC.

Com a obtenção dos ativos considerados eficientes, ou seja, aqueles que obtiveram 1,0 pelo modelo DEA, formou-se a carteira DEA (1/N), uma carteira ingênua, com o mesmo percentual de participação para todos os ativos. Os ativos formadores dessa carteira foram, então, otimizados pela abordagem Sharpe, utilizando-se o *Solver*, dando origem à carteira DEA Sharpe. As três carteiras foram comparadas em relação aos seus betas, retornos, variância e Índice de Sharpe. Por fim, comparou-se o retorno acumulado dessas carteiras para o período de 36 meses em relação ao Ibovespa e ao IBrX50.

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

A partir dos retornos mensais e da variação de 48 dos 50 ativos do IBrX50 para o período de julho de 2015 a junho de 2018, calculou-se o retorno médio e o desvio padrão (risco) dos ativos, que são apresentados na tabela 1:

Tabela 1: Retorno e risco dos ativos componentes do IBrX50 – abril a agosto de 2018

CÓDIGO	AÇÃO	RETORNO MÉDIO %	DESVIO PADRÃO %
ABEV3	AMBEV S/A	-0.04%	5.10%
B3SA3	B3	1.55%	8.16%
BBAS3	BRASIL	0.03%	13.18%
BBDC4	BRADESCO	0.59%	9.52%
BBSE3	BBSEGURIDADE	-0.66%	6.82%
BRAP4	BRADESPAR	1.68%	18.35%
BRFS3	BRF SA	-3.97%	10.05%
BRKM5	BRASKEM	3.60%	10.76%
BRML3	BR MALLS PAR	-0.42%	9.42%
CCRO3	CCR SA	-1.10%	8.93%
CIEL3	CIELO	-1.84%	7.74%
CMIG4	CEMIG	-1.42%	12.78%
CSAN3	COSAN	1.04%	8.04%
CSNA3	SID NACIONAL	-1.63%	25.68%
ELET3	ELETRORAS	0.63%	16.50%
ESTC3	ESTACIO PART	0.37%	13.44%
EMBR3	EMBRAER	-0.31%	9.87%
EQTL3	EQUATORIAL	1.24%	6.02%
FIBR3	FIBRIA	0.72%	15.67%
GGBR4	GERDAU	0.41%	17.26%
GOAU4	GERDAU MET	-2.59%	24.52%
HYPE3	HYPERA	0.45%	9.63%
SBSP3	SABESP	0.81%	9.35%
ITSA4	ITAUSA	0.87%	8.56%
ITUB4	ITAUUNIBANCO	1.07%	8.40%
JBSS3	JBS	-2.04%	12.07%
KLBN11	KLABIN S/A	0.16%	6.98%
KROT3	KROTON	-1.14%	11.88%
LAME4	LOJAS AMERIC	-0.01%	8.96%
LREN3	LOJAS RENNER	0.77%	7.69%
MGLU3	MAGAZ LUIZA	7.17%	21.83%
MRVE3	MRV	1.07%	10.25%
MULT3	MULTIPLAN	0.36%	6.74%
NATU3	NATURA	-0.22%	11.12%
PCAR4	P.ACUCAR-CBD	-0.37%	10.70%
PETR3	PETROBRAS	0.13%	13.34%
PETR4	PETROBRAS	-0.23%	15.49%
QUAL3	QUALICORP	-0.20%	12.12%

OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO: APLICAÇÕES NO IBRX50

RADL3	RAIADROGASIL	1.12%	7.92%
RENT3	LOCALIZA	2.07%	9.69%
SANB11	SANTANDER BR	1.70%	9.69%
SMLS3	SMILES	-0.49%	15.41%
VALE3	VALE	1.98%	14.65%
TIMP3	TIM PART S/A	0.49%	8.65%
UGPA3	ULTRAPAR	-1.01%	7.20%
USIM5	USIMINAS	-1.53%	25.95%
VIVT4	TELEF BRASIL	0.33%	6.03%
VVAR11	VIAVAREJO	-0.59%	21.09%

Fonte: elaborado pelos autores

A média dos retornos foi de 0,22%, enquanto a média do risco foi de 11,86%. Dos 48 ativos, 21 registraram retornos negativos, o que correspondeu a 43,75% da composição da carteira. Os maiores retornos foram os do Magazine Luiza, com 7,17% e risco de 21,83%, da Braskem, com 3,6% e risco de 10,76%, e da Localiza, com 2,07% e risco de 9,69%.

As menores médias de retorno foram observadas para a BRF (-3,97%), Gerdau Met (-2,59%) e JBS (-2,04%). Os maiores riscos foram registrados para a Usiminas (25,95%), a CNS (25,68%) e Gerdau Met (24,52%), para as quais ocorreram retornos médios negativos, mostrando que, possivelmente, essas são as companhias menos atrativas aos investidores. Os ativos de menor risco, por sua vez, foram as ações da Ambev (5,10% e retorno de -0,04%), Equatorial (6,02% e retorno de 1,24%) e da Telefônica Brasil (6,03% e retorno de 0,33%).

Com a finalidade maximizar a relação entre risco e retorno, criou-se uma carteira otimizada por meio do *Solver*, aplicando-se a abordagem de Sharpe, a qual é apresentada na tabela 2:

Tabela 2: Carteira Sharpe

CÓDIGO	AÇÃO	PARTICIPAÇÃO %	RISCO %	RETORNO %
BRKM5	BRASKEM	43.77%	10.76%	1.57%
RADL3	RAIADROGASIL	21.90%	7.92%	0.25%
MGLU3	MAGAZ LUIZA	19.72%	21.83%	1.41%
EQTL3	EQUATORIAL	14.62%	6.02%	0.18%

Fonte: elaborado pelos autores.

Quatro ativos foram selecionados para a composição da carteira, com a maior participação correspondendo às ações da Braskem (43,77%), para a qual observou-se retorno ponderado de 1,57% e um risco mediano, quando comparado aos demais ativos. A redução dos riscos da carteira é obtida pela baixa correlação entre os itens que a compõe. O coeficiente de correlação obtido para esse portfólio foi inferior a 0,377, sendo considerado satisfatório. Esse resultado é mostrado na tabela 3:

Tabela 3: Matriz de correlação da carteira Sharpe

	BRKM5	EQTL3	MGLU3	RADL3
BRKM5	1.000	-0.209	-0.188	-0.301
EQTL3	-0.209	1.000	0.120	0.377
MGLU3	-0.188	0.120	1.000	-0.004
RADL3	-0.301	0.377	-0.004	1.000

Fonte: elaborado pelos autores.

Para a formação da segunda carteira utilizou-se o *software* Win4Deap2 para obtenção da eficiência das DMUs. O preço/lucro e a volatilidade em 12, 24 e 36 meses foram utilizados como *inputs*, enquanto o lucro por ação e a rentabilidade em 12, 24 e 36 meses serviram como *outputs* do modelo. A tabela 4 apresenta esses dados e o resultado quanto à eficiência dos ativos:

Tabela 4: Dados de entradas (I) e saídas (O) e resultados da avaliação da eficiência

DMUs	V 12	V 24	V 36	P/L	LPA	R 12	R 24	R 36	E
	I	I	I	I	O	O	O	O	
DMU1	16.19	17.91	19.70	36.92	0.49	0.01	0.01	0.03	1.00
DMU2	28.90	29.12	32.10	31.33	0.65	0.06	0.17	0.99	0.70
DMU3	22.13	25.83	33.61	12.39	1.97	0.10	0.44	0.38	0.92
DMU4	28.26	32.42	34.79	-11.09	-0.87	0.08	0.28	0.45	1.00
DMU5	26.37	29.21	33.92	11.88	2.25	-0.10	-0.02	-0.14	0.80
DMU6	34.46	44.31	53.41	6.27	4.66	0.34	0.73	2.29	1.00
DMU7	35.16	40.75	48.14	7.05	4.06	-1.18	-1.48	-0.71	0.66
DMU8	37.70	37.49	41.01	12.14	4.18	0.37	0.67	3.66	0.97
DMU9	43.45	36.95	35.10	-14.96	-1.20	-0.23	-0.15	0.00	1.00
DMU10	29.60	33.70	35.96	10.67	0.95	-0.60	-0.54	-0.23	0.73
DMU11	37.61	45.41	51.42	8.18	0.89	-0.43	-0.61	-0.42	0.60
DMU12	29.69	29.20	31.27	10.95	1.50	-0.01	0.15	-0.20	0.80
DMU13	26.87	30.85	32.48	9.83	3.58	0.04	0.12	0.63	0.81
DMU14	68.21	59.63	57.77	-5.28	-2.31	0.09	0.01	0.54	0.51
DMU15	37.12	36.54	36.46	28.69	0.85	-0.02	-0.05	1.07	0.61
DMU16	20.48	22.31	22.88	11.15	5.09	0.41	0.38	0.61	1.00
DMU17	45.06	44.39	49.68	15.07	1.62	0.38	0.30	0.06	0.54
DMU18	33.95	37.83	40.04	29.26	2.48	0.06	0.17	0.67	0.57
DMU19	39.75	45.07	54.18	-32.40	-0.43	0.54	0.71	0.89	1.00
DMU20	41.57	51.34	64.48	-18.18	-0.34	0.27	0.58	1.00	0.75
DMU21	26.18	25.02	30.19	16.11	1.71	0.20	0.68	0.06	0.88
DMU22	27.15	26.99	30.62	8.49	1.08	0.02	0.24	0.38	0.89
DMU23	25.28	26.93	31.77	10.83	3.72	-0.32	-0.17	0.55	0.86
DMU24	37.67	53.59	56.39	36.67	0.25	0.18	0.36	0.56	0.50
DMU25	24.60	28.03	29.43	336.08	0.01	0.14	0.39	0.67	0.76
DMU26	39.64	39.09	43.58	8.17	1.14	0.30	-0.07	-0.38	0.64
DMU27	32.78	34.09	36.97	27.87	0.85	0.20	0.26	0.15	0.62
DMU28	32.21	34.73	36.99	67.77	0.25	-0.55	-0.38	-0.15	0.54
DMU29	29.07	29.53	31.90	26.85	1.09	0.16	0.04	0.14	0.71
DMU30	60.62	64.34	74.71	48.14	2.66	0.08	0.29	0.47	0.33
DMU31	29.29	28.43	31.13	7.79	1.55	0.75	0.96	36.94	1.00
DMU32	24.33	26.12	28.23	27.49	2.07	-0.07	0.18	0.78	0.78
DMU33	38.52	39.11	40.17	25.76	1.17	-0.12	-0.01	0.23	0.56
DMU34	29.65	33.70	36.58	32.19	2.42	0.16	0.18	0.15	0.63
DMU35	45.86	43.75	52.83	122.62	0.16	0.17	0.41	0.06	0.45
DMU36	47.49	46.44	54.44	108.54	0.16	0.32	0.41	0.44	0.44
DMU37	37.36	38.53	41.10	14.24	1.30	0.28	0.45	0.41	0.62
DMU38	25.82	25.57	28.44	41.44	1.60	-0.46	0.12	0.19	0.74
DMU39	30.44	32.72	34.14	6.56	3.55	-0.05	0.07	0.68	0.77

OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO: APLICAÇÕES NO IBRX50

DMU40	29.51	32.68	35.13	12.20	1.20	0.38	0.55	1.51	0.75
DMU41	50.24	54.16	69.38	7.64	1.03	0.19	0.44	1.18	0.48
DMU42	40.59	41.34	46.52	8.42	6.17	-0.10	0.19	0.21	1.00
DMU43	18.97	21.14	24.56	16.31	2.79	0.43	0.69	1.97	1.00
DMU44	27.79	26.68	32.65	23.67	0.56	0.27	0.49	0.36	0.78
DMU45	27.55	24.11	24.79	19.51	2.36	-0.65	-0.48	-0.24	0.89
DMU46	51.95	55.61	71.24	31.60	0.23	0.37	0.73	0.83	0.42
DMU47	30.91	40.37	52.35	17.35	2.86	0.07	0.13	0.20	0.66
DMU48	50.83	52.07	60.31	47.41	0.13	0.42	0.60	0.67	0.41

V: volatilidade; P/L: preço/lucro; LPA: lucro por ação; R: rentabilidade; I: inputs
O: outputs; E: eficiência.

Fonte: dados da pesquisa.

Pelo modelo DEA, a média de eficiência dos ativos do IBRX50 foi de 0,7305, sendo que nove obtiveram eficiência máxima: Ambev, Bradesco, Bradespar, BR Malls, Estácio Participações, Fibria, Magazine Luiza, Smiles e Vale. Essas ações compuseram a carteira DEA (1/N), para a qual se considerou uma participação igualitária entre os ativos, de 11,11%. A composição dessa carteira é apresentada na tabela 5:

Tabela 5: Carteira DEA (1/N)

CÓDIGO	AÇÃO	PARTICIPAÇÃO %	RISCO %	RETORNO %
ABEV3	AMBEV S/A	11.11%	5.10%	0.00%
BBDC4	BRADESCO	11.11%	9.52%	0.07%
BRAP4	BRADESPAR	11.11%	18.35%	0.19%
BRML3	BR MALLS PAR	11.11%	9.42%	-0.05%
ESTC3	ESTACIO PART	11.11%	13.44%	0.04%
FIBR3	FIBRIA	11.11%	15.67%	0.08%
MGLU3	MAGAZ LUIZA	11.11%	21.83%	0.80%
SMLS3	SMILES	11.11%	15.41%	-0.05%
VALE3	VALE	11.11%	14.65%	0.22%

Fonte: dados da pesquisa.

O maior retorno ponderado da carteira correspondeu ao ativo MGLU3, com 0,797%. Apesar de o modelo DEA ter definido os ativos BRML3 e SMLS3 como eficientes, eles apresentaram retornos negativos, com um risco considerável para o segundo. A matriz de correlação dessa carteira gerou coeficientes um pouco superiores em relação à anterior, chegando a 0,91. Apesar disso, o coeficiente foi relativamente baixo para a maioria dos ativos, como pode ser verificado na tabela 6:

Tabela 6: Matriz de correlação da carteira DEA (1/N)

	ABEV3	BBDC4	BRAP4	BRML3	ESTC3	FIBR3	MGLU3	SMLS3	VALE3
ABEV3	1.000								
BBDC4	0.467	1.000							
BRAP4	0.093	0.564	1.000						
BRML3	0.308	0.666	0.269	1.000					
ESTC3	0.342	0.477	0.371	0.347	1.000				
FIBR3	-0.149	-0.372	-0.244	-0.426	-0.194	1.000			

MGLU3	0.097	0.468	0.529	0.106	0.278	-0.127	1.000		
SMLS3	0.231	0.583	0.356	0.409	0.178	-0.246	0.457	1.000	
VALE3	-0.075	0.440	0.910	0.220	0.288	-0.176	0.428	0.185	1.000

Fonte: dados da pesquisa.

Para a formação da terceira carteira, utilizou-se os ativos identificados como eficientes pelo modelo DEA, sob os quais se aplicou a abordagem de Sharpe para a otimização do portfólio, de modo semelhante à formação da primeira carteira. Novamente, a seleção e o percentual de participação dos ativos foram obtidos com auxílio da ferramenta *Solver*. A tabela 7 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 7: Matriz de correlação da carteira DEA Sharpe

CÓDIGO	AÇÃO	PARTICIPAÇÃO %	RISCO %	RETORNO %
MGLU3	MAGAZ LUIZA	45.00%	18.35%	3.23%
FIBR3	FIBRIA	25.81%	9.52%	0.19%
VALE3	VALE	17.56%	9.42%	0.35%
ABEV3	AMBEV S/A	11.63%	5.10%	0.00%

Fonte: dados da pesquisa.

O MGLU3 foi o ativo de maior participação (45%), para o qual se registrou o maior retorno (3,23%) frente ao maior risco (18,35%) dentre os componentes dessa carteira. A menor participação foi do ativo ABEV3, com 11,63%, e para o qual os retornos foram nulos. Como pode ser observado na tabela 8, a correlação entre os itens foi considerada satisfatória, ficando abaixo de 0,428:

Tabela 8: Carteira DEA Sharpe

	ABEV3	FIBR3	MGLU3	VALE3
ABEV3	1.000	-0.149	0.097	-0.075
FIBR3	-0.149	1.000	-0.127	-0.176
MGLU3	0.097	-0.127	1.000	0.428
VALE3	-0.075	-0.176	0.428	1.000

Fonte: dados da pesquisa

Duas das três carteiras foram formadas com quatro ativos. As discussões entre o número ideal de ativos que devam compor um portfólio transitam entre os que defendem uma maior quantidade de itens na carteira (CHANCE; SHYNKEVICH; YANG, 2011; THOMÉ NETO; LEAL; ALMEIDA, 2011) e aqueles que sustentam não ser necessário um número elevado de ativos para que se atinja a diversificação. É o que afirmaram Evans e Archer (1968), ao questionarem as justificativas geralmente apresentadas para a formação de carteiras com mais de dez títulos.

Alguns autores definiram a quantidade de ativos da carteira entre seis e 16 títulos (BACH et al., 2015; SANTIAGO; LEAL, 2015), havendo trabalhos que definiram essa quantidade em cinco ativos (GASPAR; SANTOS; RODRIGUES, 2015; SOUZA et al., 2017). De acordo com Rotela Junior, Pamplona e Salomon (2014, p. 412), a redução no número de ações na carteira “associada à manutenção do risco observado sob controle, tende a gerar

economias referentes ao custo de rebalanceamento de carteiras, trazendo ganhos indiretos ao investidor”.

Optou-se, neste estudo, por manter as carteiras com quatro ativos, o que, a depender da orientação teórica seguida, pode mostrar-se uma limitação. No *Solver*, a restrição para a participação dos ativos foi definida como maior ou igual a 0 e menor ou igual a 1. Uma possível alternativa para uma carteira com uma maior quantidade de títulos seria o rebalanceamento dos percentuais de ativos através das restrições, definindo-se outros valores máximos de participação até que outras ações ingressem no portfólio.

Formadas as três carteiras propostas, passa-se à análise comparativa entre elas. O beta da carteira foi obtido pelo somatório da multiplicação entre o beta do ativo e sua participação, e indica o nível de risco da carteira frente ao *benchmark* mais utilizado ao se analisar o mercado brasileiro – o Ibovespa. Os retornos, do mesmo modo, foram ponderados pela participação dos ativos, enquanto a variância foi obtida pela relação entre a participação e a matriz de covariância. Também foram comparados o Índice de Sharpe (IS), que avalia a relação entre o risco e o retorno, e o Índice de Traynor (IT), que se diferencia do IS por utilizar como divisor em sua equação o beta da carteira ao invés do desvio padrão, sendo conhecido como o indicador de recompensa pela volatilidade.

A tabela 9 apresenta o comparativo entre as carteiras:

Tabela 9: Comparação entre as carteiras Sharpe, DEA (1/N) e DEA Sharpe

	SHARPE	DEA (1/N)	DEA SHARPE
Beta	0.6841	0.9490	0.7673
Retorno	3.41%	1.28%	3.76%
Variância	5.67%	7.82%	11.31%
IS	47.89%	7.47%	27%
IT	3.97%	0.62%	3.98%
Número de ativos	4	9	4

Fonte: dados da pesquisa.

De modo geral, a carteira Sharpe mostrou-se a opção com os melhores índices de desempenho, dado seu menor beta, menor variância e maiores IS e IT (este, praticamente o mesmo da carteira DEA SHARPE). O melhor retorno foi o da carteira DEA Sharpe, embora próximo ao retorno da carteira Sharpe. O pior desempenho foi observado para a carteira DEA (1/N), com menor retorno (1,28%), menor IS (7,47%), menor IT (0,62%) e maior beta (0,949). Esse resultado difere do achado de Rotela Junior, Pamplona e Salomon (2014), que trabalharam com os ativos do Ibovespa e no qual a carteira DEA otimizada pela abordagem de Sharpe foi a que obteve melhor IS.

Por fim, a tabela 10 apresenta os retornos acumulados das carteiras formadas e para os índices Ibovespa e IBrX50, ao longo de 36 meses:

Tabela 10: Retornos acumulados das carteiras, do Ibovespa e do IBrX50

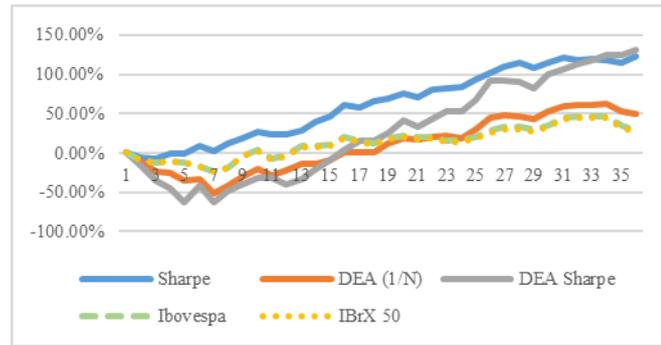
Mês	Sharpe	DEA (1/N)	DEA Sharpe	Ibovespa	IBrX50
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
2	-5.32%	-11.03%	-15.84%	-9.09%	-8.68%
3	-7.62%	-24.25%	-34.49%	-12.57%	-12.03%
4	-0.98%	-25.03%	-44.34%	-10.80%	-10.99%
5	-0.09%	-35.14%	-62.88%	-12.46%	-13.01%

6	9.27%	-33.26%	-41.85%	-16.55%	-17.22%
7	1.73%	-51.42%	-63.05%	-23.83%	-24.14%
8	12.83%	-40.80%	-47.88%	-18.25%	-18.79%
9	18.96%	-30.19%	-40.21%	-3.74%	-4.69%
10	26.87%	-20.13%	-31.43%	3.41%	2.06%
11	23.03%	-28.16%	-32.49%	-7.81%	-9.27%
12	23.27%	-21.46%	-40.17%	-1.89%	-3.37%
13	28.16%	-13.86%	-33.06%	8.20%	6.50%
14	39.14%	-13.79%	-21.06%	9.23%	7.42%
15	47.16%	-8.96%	-9.29%	10.03%	8.27%
16	60.46%	1.53%	3.82%	20.13%	18.26%
17	58.02%	1.29%	16.07%	15.25%	13.29%
18	66.52%	0.33%	15.82%	12.46%	10.41%
19	69.95%	12.21%	25.41%	19.33%	17.06%
20	75.36%	18.66%	40.73%	22.32%	19.82%
21	70.71%	16.92%	33.43%	19.74%	17.61%
22	80.56%	20.35%	42.44%	20.38%	18.20%
23	81.71%	21.18%	53.43%	16.09%	14.04%
24	83.13%	19.32%	52.76%	16.39%	14.54%
25	93.04%	30.78%	67.59%	20.97%	19.08%
26	102.10%	44.68%	91.21%	27.91%	25.87%
27	109.14%	47.88%	92.68%	32.56%	30.58%
28	115.04%	46.73%	90.02%	32.58%	30.57%
29	109.04%	42.66%	81.76%	29.33%	27.26%
30	114.90%	52.35%	99.48%	35.13%	33.09%
31	120.72%	59.46%	105.96%	45.16%	43.58%
32	117.77%	61.85%	113.47%	45.67%	44.01%
33	119.79%	60.54%	118.11%	45.69%	44.06%
34	117.41%	63.09%	125.20%	46.56%	44.69%
35	114.51%	52.77%	125.33%	34.36%	32.49%
36	122.53%	49.52%	131.48%	28.88%	26.89%

Fonte: dados da pesquisa.

Nota-se que todas as carteiras, ao final dos 36 meses analisados, apresentaram desempenho superior aos índices de mercado. O desempenho apenas não foi superior a esses índices ao considerar os 12 primeiros meses, em que os retornos das carteiras DEA (1/N) e DEA Sharpe foram negativos e inferiores ao Ibovespa e ao IBrX50. Apesar desse resultado inicial, ao final do período o desempenho do portfólio DEA Sharpe foi aproximadamente 9% superior à carteira Sharpe.

Figura 1: Retorno acumulado nos 36 meses



Fonte: dados da pesquisa.

Por meio do gráfico apresentado na figura 1, é possível visualizar os retornos acumulados das carteiras e dos índices. Percebe-se que no último período a carteira DEA Sharpe supera o desempenho da carteira Sharpe. O Ibovespa e o IBrX50 mantêm um comportamento próximo, o qual é seguido pela carteira DEA (1/N), com desempenho pouco superior a esses índices.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo objetivou verificar a eficiência dos ativos pertencentes ao IBrX50 e a composição de uma carteira otimizada composta por eles. Para isso, foram formadas e comparadas três carteiras: uma baseada na abordagem de Sharpe, uma originada pelo modelo DEA, a qual foi otimizada pela abordagem de Sharpe para a criação da terceira carteira.

A comparação entre as carteiras considerou o período de 36 meses, de julho de 2015 a junho de 2018, e ocorreu por meio dos retornos, da covariância, do beta, do Índice de Sharpe e do Índice de Treynor. Os resultados demonstraram que aquela carteira formada apenas pela abordagem de Sharpe obteve, no geral, melhor desempenho (beta e variância inferiores e Índices de Sharpe e Treynor superiores). O melhor retorno, contudo, foi observado para a carteira DEA otimizada pela abordagem de Sharpe.

Não obstante os desempenhos distintos apresentados, cabe ressaltar que considerando o período de julho de 2017 a junho de 2018, todas as carteiras formadas tiveram retornos superiores ao Ibovespa e ao IBrX50. Do mesmo modo, cabe destacar que a carteira Sharpe foi a única com desempenho superior a esses índices ao longo de todo o período analisado. Esses resultados corroboram para a demonstração da relevância dessa abordagem na otimização dos investimentos.

A Análise Envoltória dos Dados, ou DEA, apresentou-se como uma ferramenta de relevância para a área de finanças, inclusive, como foi demonstrado neste trabalho, para a gestão de investimentos. Sua crescente utilização nos trabalhos empíricos tende a aperfeiçoá-la, residindo também nesse aspecto a contribuição desta pesquisa.

Apesar dos resultados satisfatórios frente aos objetivos propostos, uma possível limitação foi a composição das carteiras com um baixo número de ativos. Sugere-se, para trabalho futuros, que as análises sejam aplicadas com diferentes restrições na ferramenta *Solver*, visando identificar a possibilidade de se arbitrar a participação dos ativos sem que haja perdas na eficiência da carteira. Por ter se baseado apenas em séries históricas para o desenvolvimento da proposta, sugere-se também a associação com outros meios de análise e a estimação dos retornos futuros dos ativos como um outro fator de comparação entre as carteiras.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDRINO, F. Q. DE L. et al. Utilização da análise envoltória de dados (DEA) na composição de carteira de investimento diversificada e eficiente. **Revista Produção Online**, v. 17, n. 2, p. 507–532, 14 jun. 2017.
- ARAÚJO, A. C. DE; MONTINI, A. DE Á. Análise de métricas de risco na otimização de portfólios de ações. **Revista de Administração**, v. 50, n. 2, p. 208–228, abr. 2015.
- ASSAF NETO, A. **Finanças Corporativas e Valor**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.
- BACH, T. M. et al. Eficiência das Companhias Abertas e o Risco versus Retorno das Carteiras de Ações a partir do Modelo de Markowitz. **Revista Evidenciação Contábil & Finanças**, v. 3, n. 1, p. 34–53, 20 abr. 2015.
- BESSLER, W.; OPFER, H.; WOLFF, D. Multi-asset portfolio optimization and out-of-sample performance: an evaluation of Black–Litterman, mean-variance, and naïve diversification approaches. **The European Journal of Finance**, v. 23, n. 1, p. 1–30, 2 jan. 2017.
- BLOOMFIELD, T.; LEFTWICH, R.; LONG, J. B. Portfolio strategies and performance. **Journal of Financial Economics**, v. 5, n. 2, p. 201–218, nov. 1977.
- CHANCE, D. M.; SHYNKEVICH, A.; YANG, T.-H. Experimental Evidence on Portfolio Size and Diversification: Human Biases in Naïve Security Selection and Portfolio Construction. **Financial Review**, v. 46, n. 3, p. 427–457, jul. 2011.
- CHARNES, A.; COOPER, W. W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision making units. **European Journal of Operational Research**, v. 2, n. 6, p. 429–444, nov. 1978.
- CHEONG, D. et al. Using genetic algorithm to support clustering-based portfolio optimization by investor information. **Applied Soft Computing**, v. 61, p. 593–602, dez. 2017.
- EVANS, J. L.; ARCHER, S. H. Diversification and the reduction of dispersion: an empirical analysis. **The Journal of Finance**, v. 23, n. 5, p. 761–767, dez. 1968.
- FAMA, E. F. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. **The Journal of Finance**, v. 25, n. 2, p. 383–417, 1970.
- GASPAR, B. C.; SANTOS, D. F. L.; RODRIGUES, S. V. Risco versus retorno das ações do setor imobiliário da BM&FBOVESPA no período de 2009 a 2012. **Revista Eletrônica de Ciência Administrativa**, v. 13, n. 3, p. 316–338, set. 2015.
- LIU, W. et al. Estimation of portfolio efficiency via DEA. **Omega**, v. 52, p. 107–118, abr. 2015.
- LO, A. W. The Adaptive Markets Hypothesis: Market Efficiency from an Evolutionary Perspective. **Journal of Portfolio Management**, v. 30, n. 5, p. 15–29, 2004.
- LOPES, A. L. M.; CARNEIRO, M. L.; SCHNEIDER, A. B. Markowitz na otimização de carteiras selecionadas por Data Envelopment Analysis. **Gestão e Sociedade**, v. 4, n. 9, p. 640–656, set. 2010.
- MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77–91, mar. 1952.

MASHAYEKHI, Z.; OMRANI, H. An integrated multi-objective Markowitz–DEA cross-efficiency model with fuzzy returns for portfolio selection problem. **Applied Soft Computing**, v. 38, p. 1–9, jan. 2016.

OLIVEIRA, M. R. G. DE et al. Otimizando uma carteira de investimentos: um estudo com ativos do Ibovespa no período de 2009 a 2011. **Revista Razão Contábil & Finanças**, v. 2, n. 2, jul. 2011.

ROTELA JUNIOR, P. et al. Stochastic portfolio optimization using efficiency evaluation. **Management Decision**, v. 53, n. 8, p. 1698–1713, set. 2015.

ROTELA JUNIOR, P.; PAMPLONA, E. D. O.; SALOMON, F. L. R. Otimização de portfólios: análise de eficiência. **RAE - Revista de Administração de Empresas**, v. 54, n. 4, p. 405–413, ago. 2014.

SANTIAGO, D. C.; LEAL, R. P. C. Carteiras Igualmente Ponderadas com Poucas Ações e o Pequeno Investidor. **Revista de Administração Contemporânea**, v. 19, n. 5, p. 544–564, out. 2015.

SAUER, D. A. The impact of social-responsibility screens on investment performance: Evidence from the Domini 400 social index and Domini Equity Mutual Fund. **Review of Financial Economics**, v. 6, n. 2, p. 137–149, jan. 1997.

SELLTIZ, C. **Métodos de pesquisa nas relações sociais**. 1. ed. São Paulo: EPU, 1960.

SERRA, R. G.; NAKAMURA, W. T. O novo Ibovespa é a melhor opção de investimento? **Revista Brasileira de Gestão de Negócios**, v. 18, n. 59, p. 87–107, jan. 2016.

SHARPE, W. F. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. **The Journal of Finance**, v. 19, n. 3, p. 425–442, set. 1964.

SHEFRIN, H. **Beyond Greed and Fear: Understanding Behavioral Finance and the Psychology of Investing**. 1. ed. New York, New York: Oxford University Press, 2007.

SHILLER, R. J. **Irrational Exuberance**. 3. ed. Princeton: Princeton University Press, 2015.

SOUZA, L. C. et al. Otimização de carteira de investimentos: um estudo com ativos do Ibovespa. **Revista de Gestão, Finanças e Contabilidade**, v. 7, n. 3, p. 201–213, set. 2017.

TARNAUD, A. C.; LELEU, H. Portfolio analysis with DEA: Prior to choosing a model. **Omega**, v. 75, p. 57–76, mar. 2018.

THOMÉ NETO, C.; LEAL, R. P. C.; ALMEIDA, V. DE S. E. Um índice de mínima variância de ações brasileiras. **Economia Aplicada**, v. 15, n. 4, p. 535–557, out. 2011.

VOGT, M.; DEGENHART, L.; RODRIGUES JUNIOR, M. M. Modelo de preferência do investidor por meio da análise envoltória de dados (DEA) em empresas brasileiras. **Enfoque: Reflexão Contábil**, v. 37, n. 1, p. 111–128, jan. 2018.

ZAKAMOULINE, V.; KOEKEBAKKER, S. Portfolio Performance Evaluation with Generalized Sharpe Ratios: Beyond the Mean and Variance. **Journal of Banking & Finance**, v. 33, n. 7, p. 1242–1254, jul. 2009.