

EXPOENTE DE HURST: UMA ANÁLISE FRACTAL DOS ÍNDICES IBOVESPA, DOW JONES E NIKKEI

HURST EXPONENT: A FRACTAL ANALYSIS OF THE IBOVESPA, DOW JONES, AND NIKKEI INDICES

Angélica Castilho Gasparotto

Doutoranda em Controladoria e Contabilidade

Universidade de São Paulo (USP)

angelicacgasparotto@usp.br

Fabiano Guasti Lima

Doutor em Administração

Universidade de São Paulo (USP)

fgl@usp.br

Resumo:

Este estudo investigou padrões nos movimentos de preços do mercado financeiro utilizando o expoente de Hurst como métrica principal. Os valores do expoente de Hurst para os índices Ibovespa, Dow Jones e Nikkei (0,3772, 0,4748 e 0,4847, respectivamente) foram calculados a partir das séries temporais de preços diários desses mercados no período de 2000 a 2024, utilizando a Análise de Flutuação Sem Tendência (DFA). Esses valores indicam o grau de persistência ou antipersistência dos movimentos de preços: valores inferiores a 0,5, como o do Ibovespa, sugerem maior volatilidade e tendência de reversão à média, enquanto valores próximos de 0,5, como os do Dow Jones e Nikkei, refletem uma estrutura mais aleatória e menos previsível no longo prazo. A análise dos valores do expoente de Hurst sugere que o comportamento dos mercados não é completamente aleatório, contrariando aspectos da Hipótese dos Mercados Eficientes. Os resultados obtidos fornecem *insights* valiosos para investidores e pesquisadores, destacando a presença de padrões exploráveis e variações estruturais entre os mercados analisados. Essas descobertas possuem implicações significativas para a tomada de decisões financeiras e o desenvolvimento de estratégias de investimento mais informadas.

Palavras-chaves: expoente de Hurst; persistência de preços; volatilidade do mercado.

Abstract:

This study investigated patterns in financial market price movements using the Hurst exponent as the primary metric. The Hurst exponent values for the Ibovespa, Dow Jones, and Nikkei indices (0.3772, 0.4748, and 0.4847, respectively) were calculated from the daily price time series of these markets over the period from 2000 to 2024, using Detrended Fluctuation Analysis (DFA). These values indicate the degree of persistence or antipersistence in price movements: values below 0.5, such as that of the Ibovespa, suggest greater volatility and a tendency to revert to the mean, while values close to 0.5, as observed for the Dow Jones and Nikkei, reflect a more random and less predictable structure in the long term. The analysis of the Hurst exponent values suggests that market behavior is not entirely random, challenging

GASPAROTTO, A. C.; LIMA, F. G.. Expoente de Hurst: uma análise fractal dos índices IBOVESPA, DOW JONES e NIKKEI.

CONTABLOMETRIA - *Brazilian Journal of Quantitative Methods Applied to Accounting*, Monte Carmelo, v. 13, n. 2, p. 34-48, jul.-dez./2026.

- a) Submissão em: 11/04/2025.
- b) Envio para avaliação em: 11/04/2025.
- c) Término da avaliação em: 02/05/2025.
- d) Correções solicitadas em: 02/05/2025.
- e) Recebimento da versão ajustada em: 21/05/2025.
- f) Aprovação final 27/05/2025.

aspects of the Efficient Market Hypothesis. The results obtained provide valuable insights for investors and researchers, highlighting the presence of exploitable patterns and structural variations among the markets analyzed. These findings have significant implications for financial decision-making and the development of more informed investment strategies.

Keywords: Hurst exponent; price persistence; market volatility.

1 Introdução

A intrigante complexidade do comportamento natural sempre inspirou a humanidade a buscar padrões e leis que pudessem decifrar esses fenômenos. Na matemática, particularmente no fascinante campo da geometria fractal, surgem três estados distintos de aleatoriedade: fraco, médio e forte. Por outro lado, tradicionalmente, a teoria financeira convencional assume que as flutuações de preços podem ser modeladas adequadamente por processos aleatórios. No entanto, ao tentar descrever sistemas financeiros complexos, a seleção das variáveis relevantes torna-se um desafio monumental. Diversas indagações surgem, tais como: como escolher as variáveis corretas? Quais eventos realmente influenciam os movimentos de preços nos mercados?

O comportamento aparentemente irracional dos investidores é frequentemente ignorado na construção de modelos matemáticos, deixando de considerar emoções como medo e coragem, pois equacionar sentimentos pode ser uma tarefa quase impossível. Muitos pesquisadores optam por métodos puramente aleatórios, desconsiderando que os processos do mundo real podem ser ao mesmo tempo determinísticos e ruidosos, conforme argumentado por Mandelbrot (1982). Essa perspectiva desafia a crença comum de que sistemas complexos são imprevisíveis, destacando que padrões complexos podem surgir de maneiras previsíveis e determinísticas — uma característica central do caos determinístico.

Mandelbrot, ao examinar padrões naturais, observou que eles não poderiam ser completamente descritos pela geometria euclidiana. As nuvens não possuem forma esférica perfeita, os raios não seguem trajetórias lineares, e as formas das montanhas, árvores e litorais não podem ser contidas dentro de formas geométricas simples, como retângulos ou hexágonos. A complexidade encontrada na natureza não se encaixa nas estruturas regulares e simétricas da geometria tradicional. Assim, Mandelbrot cunhou o termo "fractais", derivado do verbo em latim *frangere*, que significa "quebrar", para descrever esses objetos geométricos irregulares e fragmentados (Mandelbrot, 1982). Essa perspectiva revolucionária redefiniu a compreensão dos padrões naturais e, por extensão, sua possível aplicação em áreas como os mercados financeiros.

Nesse sentido, para aplicar o conceito de fractal à análise de séries temporais financeiras, é fundamental explorar o conceito do expoente de Hurst. Esse expoente fornece *insights* valiosos sobre a persistência ou antipersistência de uma série temporal. Séries persistentes, caracterizadas por um expoente de Hurst superior a 0,5, apresentam padrões que tendem a se manter ao longo do tempo, enquanto séries antipersistentes (expoente de Hurst inferior a 0,5) demonstram uma tendência à reversão (Hurst, 1951). Por outro lado, o movimento browniano (expoente de Hurst igual 0,5) representa um processo completamente aleatório.

Ao combinar a teoria fractal com o conceito do expoente de Hurst, adentra-se um domínio onde padrões caóticos tornam-se previsíveis até certo grau. Essa interseção entre a geometria fractal e a análise de séries temporais, em especial as séries temporais financeiras,

oferece uma perspectiva poderosa para compreender não apenas a complexidade dos mercados financeiros, mas também os mistérios intrínsecos da natureza em sua totalidade.

Nos domínios da teoria financeira quantitativa, as flutuações de preços nos mercados financeiros foram frequentemente modeladas usando processos estocásticos, presumivelmente livres de efeitos de memória de longo prazo (Fama, 1970). No entanto, essa abordagem exclui os efeitos de memória longa presentes nas séries temporais financeiras, desafiando a Hipótese dos Mercados Eficientes (HME) e a previsibilidade do mercado. As críticas à HME foram iniciadas por Mandelbrot (Mandelbrot, 1982) e Taylor (Taylor, 1965), que propuseram que os retornos dos mercados financeiros possuem propriedades de memória longa, podendo ser analisados por meio de modelos de movimento browniano fracionário (FBM). Além disso, a literatura existente identifica características empíricas genéricas, conhecidas como "fatos estilizados", como não linearidade, dinâmica da volatilidade, tendências fractais induzidas por *momentum* e processos multifractais, todos presentes nas séries temporais de ativos financeiros (Peng *et al.*, 1994).

A presença de propriedades de memória longa tem o potencial de contradizer pressupostos fundamentais da teoria financeira tradicional, como a HME. A análise do expoente de Hurst, derivada da teoria de FBM, surge como uma ferramenta essencial para testar a independência das séries temporais dos mercados financeiros e avaliar a eficiência do mercado, considerando eventos históricos e liberalizações de mercado (Hurst, 1951). No entanto, a ausência de metodologias estatísticas de inferência e a falta de distinções detalhadas entre memórias de curto e longo prazo limitaram as estimativas do expoente de Hurst.

Sugere-se que os expoentes de Hurst variam ao longo do tempo devido à dependência de características específicas de cada período, implicando que tanto as propriedades de memória longa quanto a eficiência do mercado são intrinsecamente dependentes do tempo. Essa variabilidade temporal sugere que o processo subjacente pode ser fractal e potencialmente multifractal, indicando uma complexidade matemática profunda e interconectada.

Para contribuir com esse campo, este estudo realiza uma análise detalhada da dinâmica do expoente de Hurst, utilizando diferentes abordagens, como janelas temporais móveis, análise não linear e métodos de desdobramento multifractal. A análise multifractal fornece *insights* sobre as características multifractais e comportamentos de lei de potência, oferecendo indícios de previsibilidade durante crises financeiras. Este estudo também apresenta uma análise crítica dos resultados empíricos, conexões teóricas e limitações, discutindo implicações e perspectivas futuras emergentes. Até o momento, nenhum outro estudo realizou uma análise tão aprofundada da dinâmica do expoente de Hurst, fornecendo uma contribuição significativa para a compreensão da complexidade dos mercados financeiros.

2 Metodologia

As análises foram conduzidas utilizando a linguagem Python (versão 3.9), com as bibliotecas NumPy (versão 1.23.5), Pandas (versão 1.5.3) e Matplotlib (versão 3.5.1) para a manipulação e visualização dos dados. O código utilizado para o cálculo do expoente de Hurst, assim como os dados, estão disponíveis como elementos suplementares.

Os dados históricos dos índices Ibovespa, Dow Jones e Nikkei 225 foram obtidos diretamente do Yahoo Finance utilizando a biblioteca Yfinance. Para cada índice, foi criada uma série temporal com os preços de fechamento diários no período de 01 de janeiro de 2000 a 31 de dezembro de 2024. Esses dados foram organizados em DataFrames por meio da biblioteca Pandas, permitindo uma estruturação adequada para as análises subsequentes.

O cálculo do expoente de Hurst foi implementado por meio de uma função personalizada baseada na metodologia de Análise de Regressão Log-Log. Essa função estima

o expoente H utilizando a relação: $\sigma_\tau \sim \tau^H$, em que σ_τ representa o desvio padrão das diferenças incrementais da série temporal para diferentes *lags* (τ). A função percorre uma faixa de *lags* definida entre um mínimo e um máximo (por padrão, entre 2 e 200), calcula os desvios padrão correspondentes, e então aplica uma regressão linear entre os logaritmos de τ e σ_τ , extraindo o expoente H a partir do coeficiente angular da reta ajustada.

Além do cálculo pontual de H , foi feita uma análise de sensibilidade do expoente em relação ao parâmetro *max_lag*, variando-o de 10 a 1000. Os resultados foram visualizados por meio de gráficos, permitindo observar a estabilidade (ou instabilidade) do valor de H ao longo dos diferentes horizontes de escala.

Por fim, foram construídos gráficos comparativos entre os índices analisados, evidenciando as diferenças nos valores do expoente de Hurst ao longo do tempo e entre os índices Ibovespa, Dow Jones e Nikkei.

2.1 Análise de flutuação sem tendência (DFA)

Para calcular o expoente de Hurst de forma simplificada, utilizamos a autocorrelação de uma série temporal, que representa a relação da série consigo mesma em diferentes intervalos de tempo. Existem duas abordagens principais para calcular o expoente de Hurst: o método do Intervalo Reescalado (*Rescaled Range*) e a Análise de Flutuação Sem Tendência (*Detrended Fluctuation Analysis* – DFA). Neste contexto, optou-se pelo método DFA, pois não exige que a série temporal seja estacionária.

Na Análise de Flutuação Sem Tendência (DFA), inicia-se selecionando um intervalo de *lags* (por exemplo, de 2 a 200) para análise. Para cada *lag*, calcula-se a diferença entre o valor da série temporal no tempo $t + \tau$. Em seguida, determina-se o desvio padrão (S) dessas diferenças. Esse método é particularmente valioso para a análise de séries temporais que exibem características de processos de memória longa ou ruído $\frac{1}{f}$, pois lida de maneira eficaz com não estacionaridades nas estatísticas ou na dinâmica subjacente da série (Peng *et al.*, 1994).

O expoente de Hurst obtido por meio da DFA é semelhante ao expoente de Hurst tradicional, porém apresenta a vantagem de ser aplicável a sinais cujas propriedades estatísticas ou dinâmicas não são estáveis ao longo do tempo. Ele está relacionado a medidas baseadas em técnicas espectrais, como a autocorrelação e a transformada de Fourier (Hurst, 1951).

A DFA foi introduzida por Peng *et al.* em 1994 como uma extensão da análise de flutuação ordinária. Desde então, tornou-se uma ferramenta fundamental em estudos sobre processos estocásticos, teoria do caos e análise de séries temporais, sendo citada em mais de 3.000 trabalhos até 2022 (Peng *et al.*, 1994).

Essa técnica consiste em dividir uma sequência de variáveis aleatória $X(t)$, de tamanho S em blocos não sobrepostos (S/τ), cada um contendo t pontos. A tendência linear local é dada por $z(t) = at + b$ em cada bloco. A função de flutuação sem tendência ($F_k^2(\tau)$) é definida como:

$$F_k^2(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{t=k\tau+1}^{(k+1)\tau} |X(t) - z(t)|^2, \quad k = 0, \dots, \frac{S}{\tau} - 1 \quad (1)$$

Tomando-se a média da função acima:

$$\langle F^2(\tau) \rangle = \frac{\frac{1}{S}}{\tau \sum_{k=0}^{\frac{S}{\tau}-1} F_k^2(\tau)} \quad (2)$$

Se $X(t)$ forem variáveis aleatórias ou possuírem correlações de curto alcance, o comportamento esperado segue uma lei de potência:

$$\langle F^2(\tau) \rangle \sim \tau^H \quad (3)$$

onde H é o expoente de Hurst.

A ideia geral desse método é estudar o expoente de Hurst local em função do tempo e da escala, sendo esse expoente uma métrica global do comportamento da série temporal.

2.2 Movimento Browniano fracionário

Na teoria das probabilidades, o Movimento Browniano Fracionário, também conhecido como Movimento Browniano Fractal, pode ser generalizado a partir do Movimento Browniano padrão, mas os incrementos desse movimento não precisam ser independentes (Mandelbrot, 1982).

O Movimento Browniano Fracionário é um processo gaussiano bem conhecido como um processo estocástico, no qual os incrementos são definidos por:

$$E \left\{ (X(t_2) - X(t_1))^2 \right\} \sim |t_2 - t_1|^{2H}, \quad H \in [0, 1] \quad (4)$$

O Movimento Browniano é um caso particular do expoente de Hurst quando $H=0,5$. O expoente de Hurst descreve o comportamento de um processo estocástico da seguinte forma:

- a) $H < 0,5$: indica comportamento antipersistente, ou seja, desvios em uma direção tendem a ser seguidos por desvios na direção oposta;
- b) $H = 0,5$: representa um comportamento aleatório (Movimento Browniano);
- c) $H > 0,5$: indica comportamento persistente, ou seja, memória longa, com desvios tendendo a manter a mesma direção; e
- d) $H = 1$: caso limite, no qual $X(t) \sim t$.

2.3 Dimensão De Hausdorff

A Dimensão de Hausdorff é uma ferramenta essencial para descrever a complexidade geométrica de conjuntos, sendo amplamente aplicada na análise de séries temporais e processos estocásticos (Hausdorff, 1919). Segundo Falconer (2004), essa métrica é uma generalização da dimensão euclidiana, permitindo caracterizar estruturas fractais com maior precisão.

No contexto financeiro, a Dimensão de Hausdorff tem sido utilizada para modelar a fractalidade do mercado e prever seu comportamento. Por exemplo, Erokhin e Roshka (2018) analisaram as cotações do rublo/dólar e demonstraram que essas séries temporais possuem propriedades fractais. O estudo utilizou o expoente de Hurst para confirmar essa hipótese, mostrando que a Dimensão de Hausdorff pode fornecer uma visão detalhada das flutuações do mercado.

Mandelbrot e Hudson (2004) argumentam que ativos financeiros com menor dimensão fractal apresentam comportamento mais previsível e menos volátil, o que pode contribuir para a formação de portfólios mais estáveis. Essa ideia corrobora o uso da geometria fractal como ferramenta para a construção de estratégias robustas de investimento. De forma complementar, Peters (1994) aplicou conceitos da geometria fractal e da teoria do caos à análise dos mercados financeiros, demonstrando que a estrutura fractal dos preços pode influenciar diretamente a estabilidade e previsibilidade dos portfólios. Ambos os autores reforçam a relevância da teoria fractal na formulação de estratégias de investimento fundamentadas na complexidade dinâmica dos mercados.

Ademais, Dominique (2009) utilizou essa métrica para estudar a economia walrasiana, demonstrando que o conjunto de preços de equilíbrio pode ser descrito como um atrator fractal. Isso sugere que os mercados financeiros operam de maneira não linear, influenciados por estruturas autossimilares.

Osu e Adindu-Dick (2014) ampliaram essa abordagem ao aplicar o modelo espectral multifractal na análise dos retornos dos ativos. Seu estudo mostrou que a dispersão fractal de

Hausdorff pode ser usada para medir a volatilidade do mercado e prever tendências futuras com maior precisão.

Dessa forma, a Dimensão de Hausdorff tem se mostrado uma ferramenta poderosa para a análise financeira, permitindo uma compreensão mais aprofundada da dinâmica dos mercados e das propriedades estatísticas dos preços dos ativos.

2.3.1 Relação entre a Dimensão de Hausdorff e o Expoente de Hurst

A teoria dos fractais introduzida por Mandelbrot propõe que certos objetos geométricos e séries temporais exibem propriedades de autossimilaridade, ou seja, padrões que se repetem em diferentes escalas (Mandelbrot, 1982). A Dimensão de Hausdorff, nesse contexto, é uma medida matemática usada para quantificar a complexidade de estruturas fractais e pode ser associada à forma como essas estruturas se manifestam em dados temporais.

Séries temporais com comportamento fractal frequentemente exibem essa autossimilaridade ao longo do tempo, e essa característica está intimamente relacionada ao expoente de Hurst (Hurst, 1951). Este expoente indica o grau de dependência de longo prazo de uma série temporal: valores de $H \approx 0,5$ sugerem comportamento aleatório (sem memória), enquanto valores superiores ou inferiores indicam persistência ou antipersistência, respectivamente (Feder, 1988).

No contexto financeiro, diversas pesquisas têm utilizado o expoente de Hurst para caracterizar a complexidade e previsibilidade dos mercados. Por exemplo, o estudo de Erokhin e Roshka (2018) analisou séries financeiras com base em propriedades fractais e mostrou como o expoente de Hurst e a Dimensão de Hausdorff se relacionam ao descrever a estrutura autossemelhante dos preços no mercado russo. Os autores encontraram que essas medidas confirmam a natureza fractal do mercado e podem ser utilizadas para previsão de comportamento futuro (Erokhin e Roshka, 2018).

Outros estudos reforçam essa associação. Uthayakumar e Jayalalitha (2018) demonstraram que é possível estimar a dimensão fractal de séries financeiras diretamente a partir do expoente de Hurst, estabelecendo uma ponte prática entre a geometria fractal e a estatística aplicada à análise de mercados (Uthayakumar e Jayalalitha, 2018).

Portanto, a relação entre a Dimensão de Hausdorff e o expoente de Hurst está vinculada à autossimilaridade inerente às séries temporais financeiras, revelando-se uma ferramenta poderosa na modelagem da complexidade e previsibilidade de mercados. Essa conexão é especialmente relevante na análise de volatilidade, estrutura de dependência temporal e maturidade dos sistemas financeiros.

2.4 Fractais

Os fractais fornecem uma estrutura robusta para a análise de dados de mercado, devido à sua autossimilaridade e escalabilidade inerentes. Essas propriedades tornam os fractais uma ferramenta ideal para modelagem de sistemas complexos, como os mercados financeiros (Feder, 1988; Pietronero; Tosatti, 2008). Neste estudo, os fractais são utilizados para analisar os dados de mercado, gerando um padrão fractal baseado no expoente de Hurst dos índices analisados.

O processo de geração fractal demonstra o conceito de autossimilaridade, no qual padrões são replicados em diferentes escalas. Esse princípio está diretamente relacionado à Dimensão de Hausdorff, que quantifica a complexidade desses padrões. Além disso, os fractais permitem visualizar persistência e outras dinâmicas temporais encapsuladas no expoente de Hurst (Vicsek, 1992).

O algoritmo de geração fractal utilizado neste estudo emprega desenho recursivo para criar representações visuais desses padrões autossimilares. A estrutura recursiva reflete a escala hierárquica capturada pela Dimensão de Hausdorff e está intrinsecamente ligada às propriedades de persistência indicadas pelo expoente de Hurst. Para alcançar esse objetivo, é utilizada uma função geradora de fractais que aceita os seguintes parâmetros de entrada: x e y : coordenadas do ponto central atual; $size$ (o tamanho atual do elemento fractal); $depth$ (número de camadas recursivas restantes), e $dimension$ (parâmetro que controla a escala do fractal). A estrutura recursiva garante que cada camada exiba autossimilaridade, uma característica fundamental dos fractais (Pietronero; Tosatti, 2008).

O algoritmo reflete a interação entre a geometria fractal e a análise de séries temporais. Essa sinergia entre representação visual e modelagem matemática possibilita uma compreensão mais profunda da complexidade dos mercados sob a ótica dos fractais.

3 Resultados e discussão

O expoente de Hurst é uma ferramenta estatística amplamente utilizada para analisar a persistência ou antipersistência em séries temporais financeiras, fornecendo importantes *insights* sobre a eficiência e o grau de maturidade dos mercados. Quando os valores do expoente se aproximam de 0,5, o comportamento do mercado tende a refletir um passeio aleatório, característico de mercados eficientes. Por outro lado, valores significativamente diferentes de 0,5 sugerem a presença de memória de longo prazo ou padrões persistentes nos retornos.

Diversos estudos têm investigado o comportamento do mercado japonês sob essa ótica. Alvim *et al.* (2021), por exemplo, analisaram mercados acionários de países desenvolvidos, incluindo o Japão, e observaram que o índice Nikkei apresentou variações significativas no expoente de Hurst ao longo do tempo. Essas flutuações são interpretadas como indícios de mudanças na eficiência do mercado japonês, que é tradicionalmente considerado um mercado maduro e consolidado.

No caso do Brasil, o índice Ibovespa também foi objeto de estudos baseados no expoente de Hurst. Cajueiro e Tabak (2004) analisaram a eficiência do mercado acionário brasileiro e encontraram valores do expoente superiores a 0,5 em diversos períodos. Esses resultados indicam a existência de dependência temporal de longo alcance, sugerindo que o mercado brasileiro, por vezes, oferece oportunidades de arbitragem decorrentes de sua menor eficiência relativa em relação a mercados mais desenvolvidos.

De maneira geral, a análise do expoente de Hurst tem se mostrado uma abordagem eficaz para mapear a evolução e a maturidade dos mercados financeiros. Ao refletir mudanças na estrutura e eficiência dos mercados ao longo do tempo, essa métrica permite identificar padrões, rupturas e possíveis estágios de desenvolvimento, tanto em economias emergentes quanto desenvolvidas.

3.1 Ibovespa, Dow Jones Industrial Average e Nikkei 225

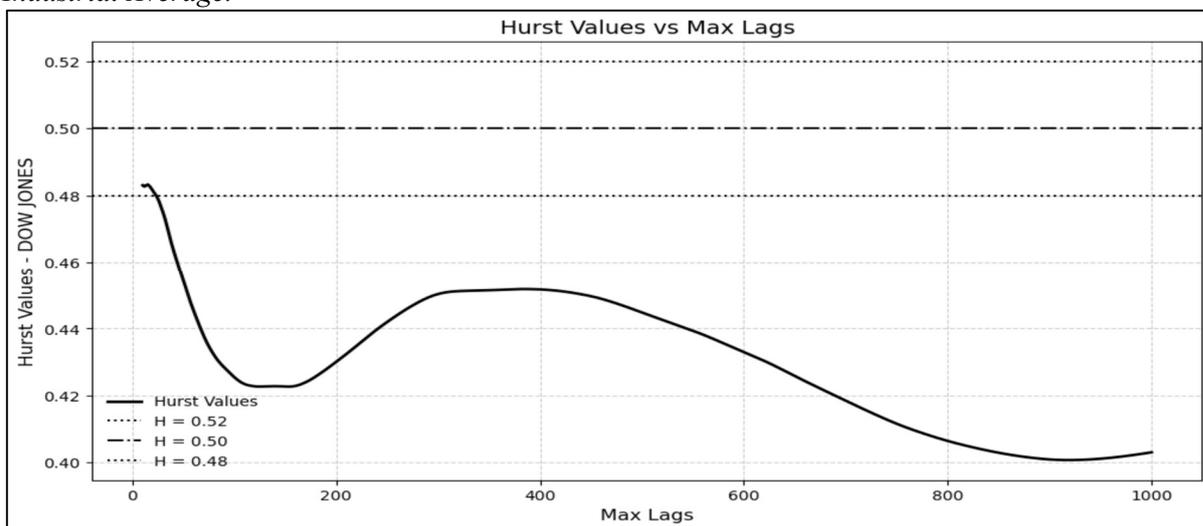
O Ibovespa, principal índice da Bolsa de Valores de São Paulo (B3) e maior da América Latina, mede o desempenho das ações mais negociadas no mercado brasileiro. Sua carteira teórica inclui empresas de diversos setores, como bancos, energia, *commodities* e varejo, sendo um importante indicador para investidores (B3, 2025).

Nos Estados Unidos, o *Dow Jones Industrial Average* é um dos índices de ações mais antigos e reconhecidos, refletindo o desempenho das 30 maiores empresas americanas, como Apple, Microsoft, Coca-Cola e Boeing. Amplamente acompanhado pela mídia, serve como termômetro da economia do país (S&P Dow Jones Indices, 2025).

No Japão, o Nikkei 225 lidera a Bolsa de Valores de Tóquio, reunindo as 225 maiores empresas listadas, incluindo Toyota, Sony e Nintendo. Além de representar a economia japonesa, é um indicador relevante do sentimento do mercado asiático (Nihon Keizai Shimbun, 2025).

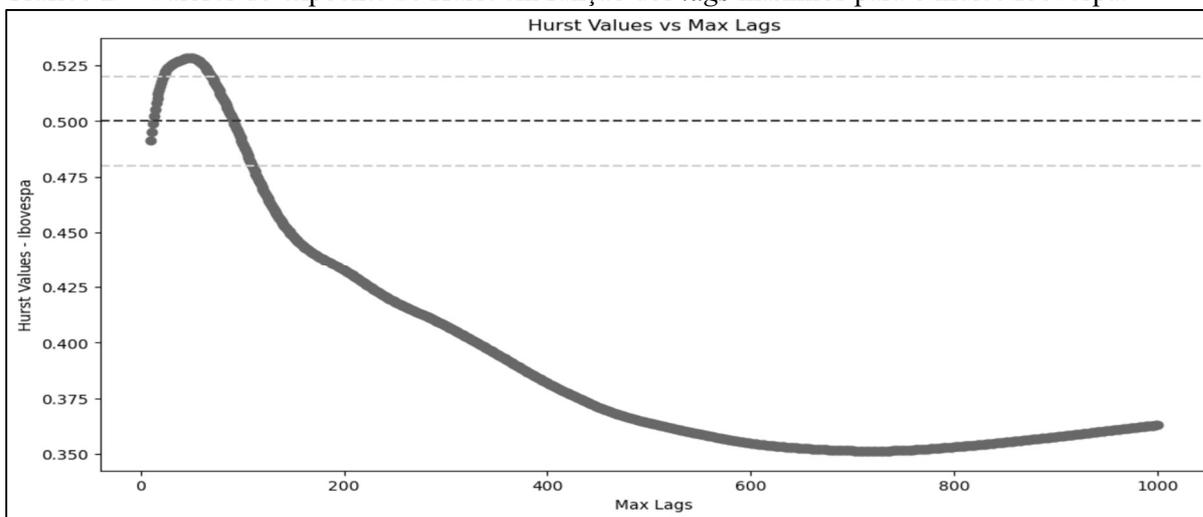
Os Gráficos 1, 2 e 3 ilustram a variação dos valores do expoente de Hurst em função dos lags máximos aplicados na análise dos índices *Dow Jones Industrial Average*, Ibovespa e Nikkei 225, respectivamente. Quando o valor de H está abaixo de 0,5, como observado para o Ibovespa, o comportamento é considerado antipersistente, indicando que os movimentos de preços tendem a reverter à média com mais frequência. Já para o Dow Jones e o Nikkei, os valores de H se mantêm próximos de 0,48 a 0,49, caracterizando uma persistência moderada — ou seja, a presença de tendências de longo prazo, embora ainda com significativa presença de aleatoriedade. A análise da variação dos valores de H ao longo dos diferentes *lags* evidencia a complexidade e a estrutura multifractal dos mercados, sendo um indicativo da heterogeneidade nos padrões de comportamento entre os diferentes índices analisados.

Gráfico 1 – Valores do expoente de Hurst em função dos *lags* máximos para o índice *Dow Jones Industrial Average*.



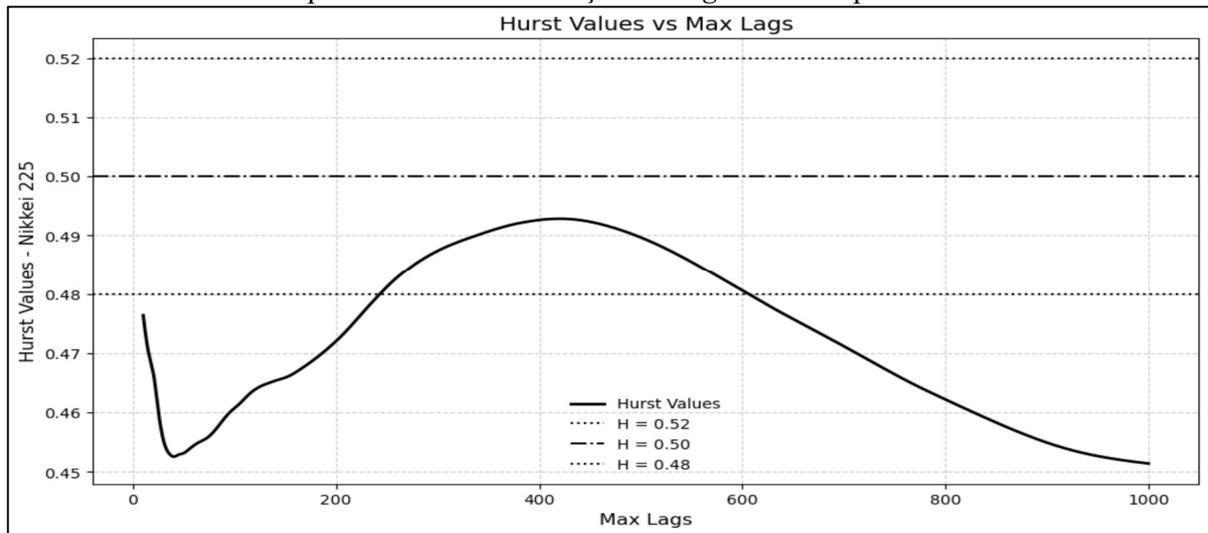
Fonte: elaborado pelos autores.

Gráfico 2 – Valores do expoente de Hurst em função dos *lags* máximos para o índice Ibovespa.



Fonte: elaborado pelos autores.

Gráfico 3 – Valores do expoente de Hurst em função dos lags máximos para o índice Nikkei 225.



Fonte: elaborado pelos autores.

O expoente de Hurst (H) mede a persistência ou antipersistência de uma série temporal, sendo um indicador crucial para avaliar a memória de longo prazo dos mercados financeiros analisados. A dimensão fractal D_f pode ser obtida diretamente a partir do expoente de Hurst por meio da equação:

$$D_f = 2 - H \tag{5}$$

Essa relação indica que, à medida que o expoente de Hurst diminui, a dimensão fractal aumenta, refletindo uma maior rugosidade e complexidade na estrutura da série temporal. Mercados com valores de H mais baixos apresentam maior imprevisibilidade e variações abruptas, enquanto aqueles com H mais próximos de 0,5 possuem uma estrutura menos caótica e mais estável (Uthayakumar e Jayalalitha, 2018).

Essa relação tem sido amplamente utilizada em estudos sobre a complexidade dos mercados financeiros. Uthayakumar e Jayalalitha (2018) demonstraram que a dimensão fractal pode ser estimada diretamente pelo expoente de Hurst, fornecendo um método eficaz para caracterizar a estrutura de séries financeiras. Seus resultados reforçam que séries com valores de H baixos (inferiores a 0,5) tendem a ser mais erráticas, enquanto séries com H próximos de 0,5 indicam comportamento de passeio aleatório (*random walk*), típico de mercados eficientes.

A Tabela 1 apresenta os valores do expoente de Hurst (H) calculados para os índices Ibovespa, Dow Jones e Nikkei em diferentes lags máximos. Com base nesses valores, a Tabela 2 exibe os respectivos cálculos da dimensão fractal D_f evidenciando a estrutura fractal subjacente aos mercados analisados.

Tabela 1 – Expoente de Hurst para seus respectivos índices e lags.

| Max lags | Hurst - Ibovespa | Hurst – Dow Jones Industrial Average | Hurst – Nikkei 225 |
|----------|------------------|--------------------------------------|--------------------|
| 20 | 0,4387 | 0,5062 | 0,4766 |
| 50 | 0,3667 | 0,5066 | 0,4666 |
| 100 | 0,3710 | 0,4750 | 0,4712 |
| 500 | 0,2576 | 0,5075 | 0,4927 |

Fonte: elaborado pelos autores.

Tabela 2 – Dimensão fractal para seus respectivos índices e lags.

| Max lags | Dimensão fractal – Ibovespa | Dimensão fractal – Dow Jones Industrial Average | Dimensão fractal – Nikkei 225 |
|----------|-----------------------------|---|-------------------------------|
| 20 | 1,5613 | 1,49388 | 1,5234 |
| 50 | 1,6333 | 1,4934 | 1,5334 |
| 100 | 1,6290 | 1,5250 | 1,5288 |
| 500 | 1,7430 | 1,4925 | 1,5073 |

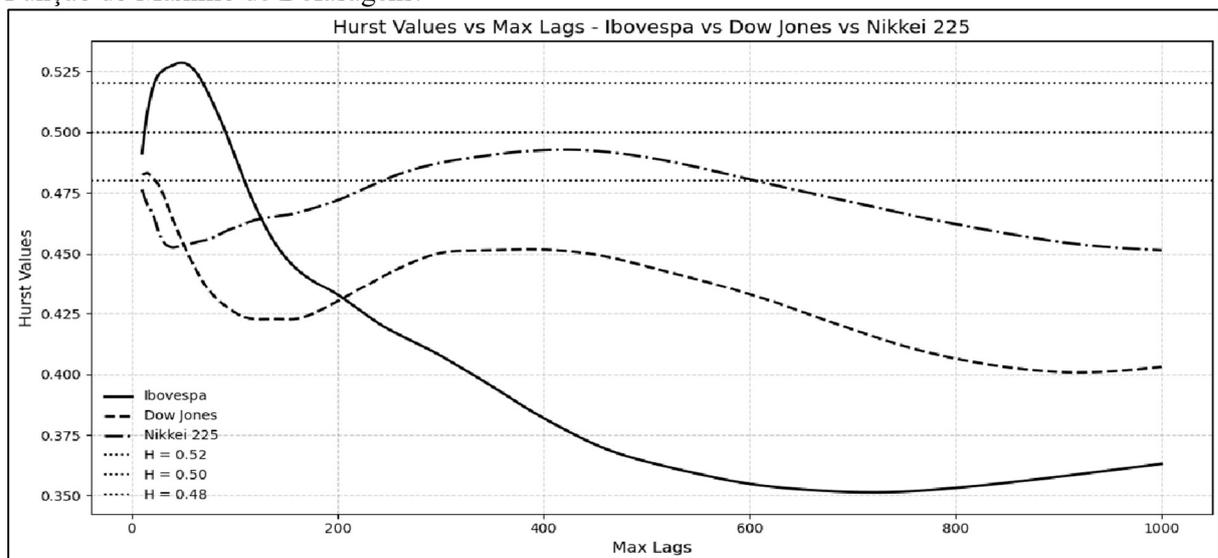
Fonte: elaborado pelos autores.

A análise dos valores do expoente de Hurst entre os índices financeiros estudados revela diferenças significativas na dinâmica de cada mercado. O Ibovespa, com um Hurst inferior a 0,5, apresenta um comportamento antipersistente, especialmente em lags maiores, onde o expoente atinge valores próximos de 0,26. Esse resultado indica que suas flutuações tendem a reverter à média em vez de persistirem em uma direção específica, o que caracteriza um mercado altamente volátil e menos previsível no longo prazo. Em contrapartida, os mercados Dow Jones e Nikkei 225 possuem valores de Hurst mais próximos de 0,5, sugerindo um comportamento mais eficiente e aleatório, típico de mercados financeiros maduros.

Conforme esperado, os valores calculados da dimensão fractal confirmam essa relação: o Ibovespa apresenta valores de dimensão fractal mais elevados (entre 1,56 e 1,74, dependendo do lag analisado), indicando maior complexidade e irregularidade nas variações dos preços. Isso corrobora a noção de que o mercado brasileiro exibe uma estrutura mais caótica, com alta volatilidade e menor eficiência na absorção de novas informações.

Em contraste, os mercados Dow Jones e Nikkei 225 apresentam dimensões fractais mais baixas, com valores próximos de 1,49 a 1,53. Essa característica está associada a mercados mais estáveis e previsíveis, onde os preços seguem padrões menos irregulares e mais consistentes ao longo do tempo. O comportamento relativamente estável do índice Dow Jones reflete sua maturidade e forte liquidez, enquanto o Nikkei, embora mais volátil que o Dow Jones, ainda exibe maior regularidade do que o Ibovespa.

Gráfico 4 – Comparação dos Valores de Hurst para os Índices Ibovespa, Dow Jones e Nikkei em Função do Máximo de Defasagens.



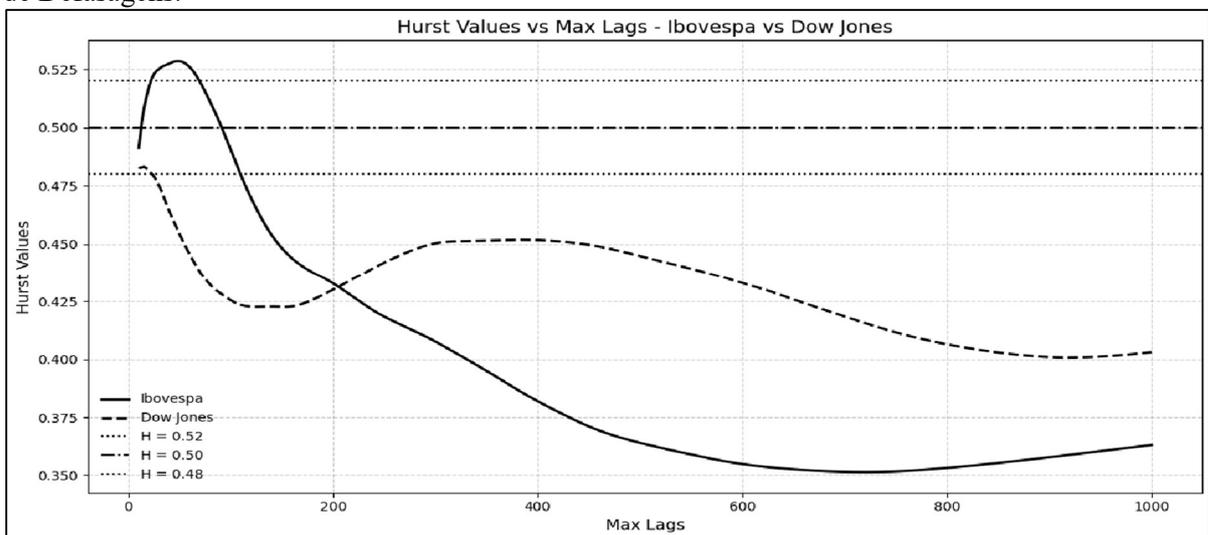
Fonte: elaborado pelos autores.

Esses resultados evidenciam que a dimensão fractal, ao lado do expoente de Hurst, é uma ferramenta poderosa para caracterizar a complexidade dos mercados financeiros. Enquanto o Ibovespa apresenta um perfil mais turbulento e de difícil previsão, os índices Dow Jones e Nikkei 225 demonstram maior estabilidade e padrões de comportamento menos erráticos. Essa análise contribui para a compreensão da maturidade e eficiência dos mercados, permitindo *insights* sobre o grau de previsibilidade e os desafios inerentes à modelagem de suas séries temporais.

Os gráficos 4 e 5 ilustram a variação dos valores do expoente de Hurst em função do número máximo de defasagens para os índices Ibovespa, Dow Jones e Nikkei 225. Observa-se que, para *lags* menores (até 50), os três mercados apresentam diferenças mais acentuadas no comportamento do Hurst, especialmente no Ibovespa, que exibe valores abaixo de 0,4. Isso reforça a ideia de que o mercado brasileiro é mais volátil e antipersistente, com oscilações que tendem a se reverter rapidamente. Esse comportamento está alinhado com a Hipótese dos Mercados Eficientes (HME), uma vez que mercados emergentes, como o Brasil, geralmente apresentam maior ineficiência devido à menor liquidez e maior impacto de ruídos externos.

Nos gráficos, à medida que a *lag* aumenta, os valores do Hurst no Dow Jones e no Nikkei convergem para 0,5, confirmando que esses mercados seguem um padrão próximo de um passeio aleatório (*random walk*). Esse resultado indica que suas oscilações não apresentam memória de longo prazo, o que é característico de mercados maduros e eficientes, conforme proposto por Fama (1970) na HME. Já no caso do Ibovespa, o Hurst continua abaixo de 0,4 mesmo para *lags* elevados, evidenciando a presença de padrões mais erráticos e uma estrutura de mercado menos eficiente.

Gráfico 5 – Comparação dos Valores de Hurst para os Índices Ibovespa e Dow em Função do Máximo de Defasagens.



Fonte: elaborado pelos autores.

Comparando as diferentes escalas de *lag* nos gráficos, nota-se que para *lags* curtos (20 e 50 períodos), o Ibovespa exibe um comportamento fortemente antipersistente, sugerindo que suas flutuações de curto prazo são mais bruscas e sujeitas a reversão rápida. Isso indica que investidores que operam em horizontes temporais mais curtos podem encontrar maior volatilidade e menor previsibilidade nos retornos desse mercado. Por outro lado, para *lags* médios (100 períodos), há uma leve redução na diferença entre os índices, sugerindo que, em

janelas mais amplas, o comportamento do Ibovespa se aproxima, em certa medida, dos mercados desenvolvidos.

Já para *lags* longos (500 períodos), a diferença entre os mercados é menos expressiva, mas o Ibovespa continua apresentando menor valor de Hurst. Esse resultado reforça a noção de que o mercado brasileiro não apenas é volátil no curto prazo, mas mantém essa volatilidade ao longo de períodos mais extensos. Isso implica que, mesmo para investidores de longo prazo, a dinâmica desse mercado permanece imprevisível e sujeita a reversões frequentes, enquanto Dow Jones e Nikkei tendem a exibir maior estabilidade e alinhamento com a HME.

A análise dos gráficos 4 e 5 evidencia, portanto, que os mercados Dow Jones e Nikkei operam de maneira mais eficiente, com oscilações que não indicam previsibilidade estatística significativa. O Ibovespa, em contraste, se desvia da HME, sugerindo que suas oscilações contêm elementos de memória de curto prazo e maior instabilidade estrutural. Assim, o expoente de Hurst se revela uma ferramenta fundamental para entender não apenas a previsibilidade dos mercados financeiros, mas também sua aderência aos princípios da eficiência de mercado, auxiliando na caracterização da dinâmica de preços e nos desafios enfrentados pelos investidores em diferentes contextos econômicos.

4 Conclusão

Este estudo apresentou uma análise detalhada do expoente de Hurst e suas implicações na compreensão da dinâmica dos mercados financeiros, com foco nos índices Ibovespa, Dow Jones e Nikkei. A partir da Análise de Flutuação Sem Tendência (DFA) e de simulações de movimento Browniano fracionário, foi possível quantificar e visualizar os diferentes graus de persistência, antipersistência e aleatoriedade nesses mercados.

Os resultados evidenciaram distinções significativas entre os índices analisados. O Ibovespa, com um expoente de Hurst médio de aproximadamente 0,3585, apresentou forte antipersistência, o que sugere uma tendência acentuada de reversão à média e alta volatilidade, comportamentos típicos de mercados emergentes. Já o índice Dow Jones, com um Hurst médio de 0,4988, revelou um comportamento próximo da aleatoriedade, caracterizando um mercado mais equilibrado entre reversão à média e persistência, conforme esperado para mercados desenvolvidos. O índice Nikkei, por sua vez, apresentou um expoente médio de 0,4768, indicando uma dinâmica intermediária, com menor volatilidade em comparação ao Ibovespa, mas ainda exibindo oscilações estruturadas.

Além do expoente de Hurst, a análise da Dimensão de Hausdorff forneceu *insights* adicionais sobre a complexidade estrutural dos mercados financeiros. Como evidenciado na Tabela 2, os valores da dimensão fractal para os três índices analisados confirmaram a relação entre a rugosidade do mercado e sua previsibilidade. O Ibovespa apresentou uma dimensão fractal média superior em comparação aos mercados desenvolvidos, indicando um comportamento mais caótico e menos previsível. Em contrapartida, o índice Dow Jones, com valores menores de dimensão fractal, demonstrou uma estrutura de mercado mais organizada e menos sujeita a flutuações abruptas. O Nikkei 225 ocupou uma posição intermediária, reforçando sua dinâmica híbrida.

A relação entre o expoente de Hurst e a Dimensão de Hausdorff corrobora a literatura fractal aplicada ao mercado financeiro. Conforme apontado por Mandelbrot e Hudson (2004), ativos financeiros com menor dimensão fractal tendem a apresentar menor volatilidade e maior previsibilidade, características observadas nos mercados desenvolvidos. Peters (1994) também argumenta que a estrutura fractal dos mercados pode influenciar diretamente a estabilidade dos portfólios, sugerindo que a dimensão fractal pode ser utilizada como uma métrica adicional na modelagem da complexidade do mercado.

Os achados deste estudo questionam a Hipótese dos Mercados Eficientes (HME), pois a presença de padrões não aleatórios e comportamentos previsíveis sugere que os mercados financeiros não operam de forma puramente eficiente. Segundo Fama (1970), mercados eficientes refletem instantaneamente todas as informações disponíveis, tornando impossível prever seus movimentos futuros. No entanto, os valores de Hurst significativamente diferentes de 0,5 encontrados para o Ibovespa e o Nikkei indicam que esses mercados possuem memória de curto prazo, permitindo que tendências passadas influenciem seus movimentos. Isso sugere que o comportamento do mercado pode ser parcialmente previsível, contrariando a versão mais rígida da HME.

Por outro lado, os resultados do Dow Jones, com H próximo de 0,5, estão em maior conformidade com a HME, indicando que os retornos desse mercado seguem um padrão aleatório e, portanto, são menos suscetíveis a previsões estatísticas. Dessa forma, os achados sugerem que a eficiência de mercado não é homogênea entre diferentes economias, reforçando a ideia de que mercados emergentes apresentam maior ineficiência estrutural, enquanto mercados desenvolvidos operam mais próximos do modelo eficiente.

Em conclusão, este estudo ressalta a relevância do expoente de Hurst e da Dimensão de Hausdorff como ferramentas essenciais para compreender o comportamento dos mercados financeiros. Os resultados contribuem não apenas para um entendimento mais aprofundado da dinâmica dos mercados, mas também abrem caminho para investigações futuras sobre multifractalidade e a evolução da eficiência dos mercados ao longo do tempo. A combinação entre rigor matemático e representações visuais ofereceu um arcabouço abrangente para explorar a complexa interação entre aleatoriedade, persistência e estrutura de mercado, além de fornecer evidências empíricas sobre a eficiência e previsibilidade dos mercados globais.

Referências

- ALVIM, D. P.; LIMA, G. A. S. F.; LIMA, J. B. N. A (in)eficiência de mercados emergentes e desenvolvidos: uma análise a partir da teoria de fractais. *In: ENCONTRO DA ANPAD – ENANPAD*, 45., 2021. Maringá. *Anais eletrônicos* [...]. Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração, 2021. Disponível em: <https://anpad.com.br/uploads/articles/120/approved/4dc3ed26a29c9c3df3ec373524377a5b.pdf>. Acesso em: 21 mar. 2025.
- B3 – Brasil, Bolsa, Balcão. **Ibovespa**. São Paulo: B3, 2025. Disponível em: https://www.b3.com.br/en_us/market-data-and-indices/indices/broad-indices/ibovespa.htm. Acesso em: 24 mar. 2025.
- CAJUEIRO, D. O.; TABAK, B. M. Evidence of long range dependence in Asian equity markets: the role of liquidity and market restrictions. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, [s. l.], v. 342, n. 3-4, p. 656–664, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.05.034>. Acesso em: 21 mar. 2025.
- DOMINIQUE, C. On the computation of the Hausdorff dimension of the Walrasian economy: further notes. **Munich Personal RePEc Archive**, [s. l.], 2009. Disponível em: <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/16723/>. Acesso em: 19 fev. 2025.

EROKHIN, S.; ROSHKA, O. Application of fractal properties in studies of financial markets. **MATEC Web of Conferences**, [s. l.], v. 170, art. 01074, p. 1-7, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201817001074> . Acesso em: 19 fev. 2025.

FALCONER, K. **Fractal geometry: mathematical foundations and applications**. 2. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2003.

FEDER, J. **Fractals**. New York: Plenum Press, 1988.

HAUSDORFF, F. Dimension und äußeres Maß. **Mathematische Annalen**, [s. l.], v. 79, p. 157–179, 1918. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01457179> . Acesso em: 20 mai. 2025.

HURST, H. E. The long-term storage capacity of reservoirs. **Transactions of the American Society of Civil Engineers**, [s. l.], v. 116, p. 770–799, 1951. Disponível em: <https://doi.org/10.1061/TACEAT.0006518> . Acesso em: 20 mai. 2025.

MANDELBROT, B. B. **The fractal geometry of nature**. Rev. ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1982.

MANDELBROT, B. B.; HUDSON, R. L. **The (mis)behaviour of markets: a fractal view of risk, ruin, and reward**. London: Profile Books Ltd, 2008.

NIHON KEIZAI SHIMBUN. **Nikkei 225**. Tóquio: Nikkei Inc., 2025. Disponível em: <https://indexes.nikkei.co.jp/en/nkave/index/profile> . Acesso em: 20 mai. 2025.

OSU, B. O.; ADINDU-DICK, J. I. The multi-fractal spectrum model for the measurement of random behaviour of asset price returns. **British Journal of Mathematics & Computer Science**, [s. l.], v. 4, n. 16, p. 2326–2343, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.9734/BJMCS/2014/10971> . Acesso em: 20 mai. 2025.

PENG, C.-K. et al. Mosaic organization of DNA nucleotides. **Physical Review E**, [s. l.], v. 49, n. 2, p. 1685–1689, 1994. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.49.1685> . Acesso em: 20 fev. 2025.

PETERS, E. E. **Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics**. New York: John Wiley & Sons, 1994.

PIETRONERO, L.; TOSATTI, E. (ed.). **Fractals in Physics**. Amsterdam: North-Holland, 1986. ISBN 978-0-444-86995-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/C2009-0-14331-3> . Acesso em: 25 maio 2025.

S&P DOW JONES INDICES. **What is an index?** Nova York: S&P Dow Jones Indices, 2025. Disponível em: <https://www.spglobal.com/spdji/pt/research-insights/index-literacy/what-is-an-index/> . Acesso em: 20 mai. 2025.

TAYLOR, J. B. Fractal analysis in financial markets. *In*: MARR, M. W.; HIRSCHEY, M. (ed.). **Advances in financial economics**. Stamford: JAI Press Inc., 1997. v. 3, p. 45–78.

UTHAYAKUMAR, P.; JAYALALITHA, G. A comparison of fractal dimension algorithms by Hurst exponent using gold price time series. **International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology**, Tamil Nadu, v. 6, n. 2, p. 1210–1215, 2018. Disponível em: <http://www.ijraset.com> . Acesso em: 20 mai. 2025.