CAPACIDADE PREDITIVA DO DELTA-NORMAL VAR PARA NTN-FS DURANTE A PANDEMIA, UTILIZANDO DIFERENTES PARÂMETROS PARA A DURATION MODIFICADA

PREDICTIVE CAPACITY OF DELTA-NORMAL VAR FOR NTN-FS DURING THE PANDEMIC, USING DIFFERENT PARAMETERS FOR MODIFIED DURATION

Ramón Jorge Judar Hernandez Bustamante

Especialista em Finanças - FEA-RP/USP

ramon.h.bustamante@gmail.com

Fabiano Guasti Lima

Livre Docente em Finanças e Métodos Quantitativos pela FEA-RP/USP

fabianoguastilima@usp.br

Rafael Confetti Gatsios

Professor de Finanças e Métodos Quantitativos pela FEA-RP/USP

rafaelgatsios@usp.br

Resumo

O objetivo do presente estudo é identificar, através do recolhimento de dados históricos e aplicação de métodos quantitativos específicos, entre 4 estimações para apuração da Duration Modificada (Duration Modificada, Duration Modificada com Convexidade, Duration Exponencial e Duration Exponencial com Convexidade) qual obteve melhor desempenho para predição do Delta-Normal Value at Risk (Value at Risk – VaR) de títulos públicos prefixados que pagam cupom, durante o período pandêmico. Todas as medidas obtiveram resultados satisfatórios para um VaR de 95% de confiança. As estimações entre si não apresentaram diferenças significativas, tanto para as aproximações de primeira quanto de segunda ordem. Destaca-se o desempenho ligeiramente superior da aproximação de primeira ordem pelo método exponencial, em comparação com o método tradicional.

Palavras-chave: duration modificada; duration modificada com convexidade; value-at-risk.

Abstract

The objective of the present paper is to identify, through the collection of historical data e application of quantitative methods, among 4 estimates for calculating the Modified Duration (Modified Duration, Modified Duration with Convexity, Exponential Duration and Exponential Duration with Convexity) which obtained the best performance for predicting the Delta-Normal VaR of government bonds that pay coupons, during the pandemic period. All measures obtained satisfactory results for a 95% confidence VaR. The estimates did not present significant differences between themselves, both for the first and second order approximations. Stands out the slightly superior performance of the first-order approximation by the exponential method, when compared to the traditional method.

Keywords: modified Duration; modified duration with convexity; value-at-risk.

1 Introdução

O propósito deste estudo é avaliar, segundo a métrica de risco Delta Normal (Value at Risk – VaR) ponderado pela Duration, utilizando 4 diferentes abordagens para a Duration, qual abordagem obteve melhor desempenho para predição da perda de valor absoluto para títulos públicos brasileiros pré-fixados que pagam cupons de juros periodicamente (NTN-Fs), durante a pandemia da doença do coronavírus 2019 (COVID-19).

Este estudo se faz necessário, entre outras motivações expostas mais adiante, pois a Duration (Macaulay, 1938), quando aplicada para a determinação da variação do preço de um título mediante alteração na taxa de juros, denominando-se Duration Modificada, pode ser ineficaz para alterações significativas na taxa de juros, pois o preço de um título em função da taxa de juros apresenta uma relação não linear (Lima, 2018; Richie; Mautz Junior, Sackley, 2010). Buscando diminuir o componente de erro da estimação oferecida pela Duration Modificada, Fisher e Weil (1971) propuseram a convexidade, conforme explicado a seguir.

No entanto, outras abordagens mostraram-se mais eficientes que essa em alguns estudos. Livingston e Zhou (2005) identificaram que ao utilizar o logaritmo natural da variação do preço do título em função de uma perturbação na taxa de juros, obtém-se uma medida superior à obtida pelo método tradicional, e de quase igual acurácia ao método tradicional com a adição da convexidade. Também, a medida exponencial mostrou-se útil para investidores avessos ao risco, dado que fornece uma pequena superestimação da diminuição do preço do título para um aumento na taxa de juros. Aspecto esse mais desejado por esse perfil de investidor, pois quando comparada com a medida tradicional com adição da convexidade, a segunda subestima a desvalorização do título para um aumento na taxa de juros.

Gaio (2015, p. 9), reafirmou que, embora nos últimos anos novas metodologias de cálculo do VaR vêm sendo aprimoradas, nenhuma tem sido considerada como a que “melhor ajusta os riscos para diversos mercados e em diferentes momentos”. Dessa forma, a literatura não bate o martelo em um modelo conciso e coerente, onde este trabalho está sendo focado, buscando novas aplicações do VaR e com diferencial de aplicar no momento mais delicado que foi a pandemia da COVID 19.

Logo, dado o aumento expressivo das taxas de juros no Brasil durante o período pandêmico (Banco Central, 2022), indo de 2,00% a.a. para 12,75% a.a. em pouco mais de um ano (entre 21/01/2021 e 16/06/2022), se faz necessária uma avaliação da efetividade dessa medida e algumas de suas variações no mercado brasileiro de títulos públicos.

A utilização do Delta-Normal VaR utilizando a Duration como parâmetro de calibragem foi testado por Obadović *et al.* (2016) para títulos públicos sérvios, e para o período pandêmico com diferentes (4) parâmetros para a Duration por Di Asih e Abdurakhman (2021) para títulos emitidos pelo governo da Indonésia.

O presente estudo tem como objetivo testar os 4 parâmetros avaliados por Di Asih e Abdurakhman (2021) e identificar qual obteve o melhor desempenho, ou seja, o menor número de violações do VaR, dado um determinado nível de confiança (95 ou 99%).

Caso ocorram mais violações que o tolerado pelo nível de confiança, será realizado um teste estatístico específico, *Teste de Kupiec* (Kupiec *et al.*, 1995), que considera a distribuição de frequência particular da amostra para avaliar se a quantidade de violações é estatisticamente significativa ou não. Obadović *et al.* (2016) realizou esse teste para verificar se seu modelo estava adequado, superestimando ou subestimando o risco. Pinheiro e Fernandes (2020) o utilizaram para comparar a eficácia de modelos de paramétrico e não paramétricos de VaR para diferentes mercados de capitais.

Na literatura recente sobre o tema no Brasil, Cuppari (2015) avaliou a efetividade da imunização via Duration média de uma carteira de renda fixa composta por títulos públicos pré e pós-fixados, entre eles NTN-Fs, utilizando contratos futuros de depósitos interbancários (DI), e obteve resultado satisfatório para a estratégia, com uma rentabilidade de 94% do Certificado de Depósito Interbancário (CDI) durante o período analisado. É importante destacar que a variação do CDI no período foi de 7,02% ao ano para 10,8% ao ano. Variação pequena quando comparada ao do período analisado neste estudo, reforçando sua necessidade.

Também avaliando a efetividade da Duration para imunização de carteiras de renda fixa – no caso, carteiras de debentures –, Souza (2016) identificou que quando comparada com a estratégia de hedge via Principal Component Analysis (PCA), a estratégia que utilizou a Duration Modificada obteve desempenho inferior para explicar as oscilações na curva de juros, e conseqüentemente para o hedge do portfólio. Neste estudo foi aplicado o VaR histórico para a avaliação das duas estratégias.

Souza *et al.* (2017) testaram o VaR utilizando os modelos Delta Normal e simulação de Monte Carlo para fundos de investimentos em renda fixa, e concluíram que a abordagem Delta Normal superestimou a perda do valor absoluto, enquanto a simulação de Monte-Carlo mostrou-se mais eficiente, embora requiera estrutura tecnológica robusta para sua aplicação.

Em seu projeto, Souza *et al.* (2017) citaram que foram impostas algumas arbitrariedades ao estudo, como a fixação do *Z-Value* para determinado intervalo de confiança.

2 Referencial teórico

A pandemia do COVID-19 colocou os mercados globais sob elevado grau de stress. E dado a força e generalidade com que este evento afetou o modo de vida das pessoas, conforme citado por Das e Rout (2020), o risco passou a não incidir somente sob setores particulares da economia globalizada, mas sim nela como um todo, caracterizando-se então como um fator de risco sistêmico. O aumento do risco sistêmico foi estudado por Rizwan, Ahmad e Ashraf (2020) e especificamente no setor bancário por Duan *et al.* (2021).

Ahmad, Ashraf e Rizwan (2020) identificaram um aumento do risco sistêmico em oito dos países mais afetados pela COVID-19. À saber, Alemanha, Canada, China, Espanha, Estados Unidos, Itália, e Reino Unido. Também encontraram instituições financeiras sistemicamente importantes em cada um destes oito países. Ou seja, a possibilidade de um efeito pró cíclico para a economia global.

O estudo também concluiu que o risco sistêmico enfrentado pelos países estudados se estabilizou após o primeiro trimestre de 2020, fruto da resposta positiva dessas economias de às medidas emergenciais de política macroeconômica imposta pelos reguladores.

Duan *et al.* (2021) analisaram amostras de 1584 bancos em 64 países de fevereiro a dezembro de 2020, e identificaram um aumento do risco de *default*. O estudo focou na heterogeneidade da amostra e identificou que bancos grandes, altamente alavancados, com uma presença expressiva de empréstimos nos ativos, exibiram elevado risco sistêmico durante a pandemia.

Caracterizando-se como um risco sistêmico na economia mundial, e portanto, afetando todas as classes de ativos nos mercados globais, as volatilidades aumentaram drasticamente em diferentes países.

Este aumento foi medido por Das e Rout (2020) para os índices BSE (Índia), DAX (Alemanha), DOWJONES (Estados Unidos), CAC 40 (França) e HANSSENG (Hong Kong). Como consequência do risco sistêmico, os autores também identificaram um aumento da correlação entre os retornos dos índices para o período pandêmico. A presença do risco de

natureza sistêmica elevou de tal maneira este componente do risco total, fazendo com que os retornos dos índices se movessem muito mais na mesma direção, no caso, retornos negativos.

Apesar do elevado grau de volatilidade dos retornos, o Delta-Normal VaR, no estudo, medido a 99% de confiança, foi testado como uma medida válida para os índices em questão.

Shaik e Padmakumari (2022) também testaram a capacidade preditiva do método Delta-Normal para índices de ações nos BRICS (Brasil, Rússia, Índia, China e África do Sul). O estudo concluiu que o método Delta-Normal, assim como o método histórico, subestimou as perdas, sempre que recessões ocorriam (no caso a crise financeira global de 2007 e a COVID-19) e superestimavam os riscos quando os mercados de estabilizam novamente. O método com melhor desempenho no estudo foi o baseado em médias móveis (EWMA)

Wu e Thanyaluckpark (2019) testaram a eficácia das medidas Delta-Normal e histórica para os principais índices acionários dos BRICS entre o início de 2011 e o final de 2020. A saber, JSE All Share Index (África do Sul), MOEX (Rússia), Sensex (Índia) e SSE (China).

Foram testados os valores em risco para os intervalos de confiança de 90, 95 e 99%. Concluiu-se que o desempenho do método histórico se mostrou superior ao método Delta-Normal. Os pesquisadores justificaram a superioridade devido ao fato de o método Histórico não partir da premissa da normalidade da distribuição dos retornos. E como a distribuição dos retornos apresentou um elevado grau de assimetria, a medida paramétrica se mostrou inferior.

Andjelic, Djakovic e Radisic (2010) também compararam o método Delta-Normal com o método da simulação histórica para mercados emergentes do leste europeu. Foram testados os índices SBI20 (Eslovênia), CROBEX (Croácia), BELEX (Sérvia) e BUX (Húngria). O estudo avaliou o VaR para os intervalos de confiança de 95% e 99%, e concluiu que o método Delta-Normal obteve um desempenho superior ao da simulação histórica para o primeiro intervalo de confiança, porém foi inferior à simulação histórica para o intervalo de confiança de 99%. Os autores frisaram a elevada volatilidade das amostras de países emergentes, resultando em uma menor eficácia da medida do que quando aplicada a países desenvolvidos, mais economicamente estáveis, e, portanto, com menor volatilidade em seus mercados.

Obadović *et al.* (2016) testaram o VaR paramétrico para um portfólio de títulos sérvios composto de vencimentos longos e curtos. Concluiu-se que a medida somente pode ser aceita para o nível de significância de 5%, sendo que para 10% de significância o método superestimou o risco de portfólio, e para 1% e 0,5% de significância, a medida subestimou o risco.

O presente estudo visa superar essa arbitrariedade, estabelecendo a Duration Modificada como moduladora do *Z-Value*, conforme testado por Obadović *et al.* (2016):

$$VaR = PDZ_{(\alpha)}\sigma \quad (1)$$

Onde:

$Z_{(\alpha)}$ = *Z-Value* para uma distribuição normal a um determinado nível de significância

σ = Volatilidade dos retornos do título

P = Preço do título

D = Duration Modificada

Ao analisar o corpo de estudos referenciados acima, que exemplificam o extenso conhecimento construído sobre VaR para títulos de renda fixa na literatura nacional e internacional, pelas metodologias Delta-Normal, Duration Modificada, Simulação de Monte-Carlo e VaR histórico, este estudo vem a somar para a área ao conjugar e testar as metodologias

Delta-Normal e Duration Modificada no mercado brasileiro, fornecendo uma atualização para os praticantes, sejam acadêmicos, pessoais ou profissionais.

A NTN-F é um título escritural, nominativo e negociável. Possui taxa de cupom prefixada de 10% a.a., com juros pagos semestralmente.

Sua taxa de juros de negociação no mercado é uma taxa efetiva anual, com base 252 dias por ano – denominada mais adiante como Taxa Interna de Retorno do papel. Preço de mercado:

$$P_{NTN-F} = \sum_{k=1}^n \frac{FC_k}{(1+i_k)^{\frac{252}{2}}} \quad (2)$$

Com:

$FC_k = r \times 1.000$ para $k \neq n$ e $FC_k = r \times 1.000 + 1000$ para $k = n$.

Onde:

P_{NTN-F} = preço da NTN-F

FC_k = Fluxo de caixa do vencimento k

i_k = taxa de juros de mercado de NTN-Fs para o vencimento k .

r = taxa de cupom da NTN-F trazida para a forma de cotação semestral.

Para as NTN-Fs com taxa de cupom de 10% a.a. o cupom semestral é igual a $\sqrt{1,10} - 1 = 4,88\%$ a. s.

As NTN-Fs são negociadas no mercado por uma taxa interna de retorno y , ou *yield*, que substitui, nesse processo, as taxas de juros i_k :

$$P_{NTN-F} = \sum_{k=1}^n \frac{FC_k}{(1+i_k)^{\frac{252}{2}}} = \sum_{k=1}^n \frac{FC_k}{(1+y)^{\frac{252}{2}}} \quad (3)$$

Fonte: Adaptado de Varanda Neto, Santos e Mello (2019).

Conforme as características apresentadas, são explicitadas as seguintes propriedades do título:

- a) relação inversamente proporcional entre taxa de juros e preço do título;
- b) pagamentos de cupons de juros periódicos (semestrais) e fixos;
- c) e pagamento do principal mais juros no vencimento.

O preço justo das NTN-Fs é calculado trazendo-se a valor presente os fluxos de caixa FC_k pela *yield*. Como cada fluxo de caixa está localizado em um instante k no tempo – representado por du_k – e para cada instante k há uma taxa de juros *spot* correspondente, existem n taxas i_k no fluxo de caixa para cada vencimento de P_{NTN-F} . Por praticidade, para sua precificação e negociação é adotada uma única taxa de desconto y – *yield* – correspondente à Taxa Interna de Retorno do papel.

Segundo Martins (2020), as Letras do Tesouro Nacional e a NTN-Fs, podem ser utilizadas como ativos livres de risco no mercado brasileiro, portanto, podem ser empregadas para a construção da Estrutura a Termo de Taxa de Juros (ET TJ). Ainda que o mercado de juros futuros das taxas de DI da B3 (Brasil, Bolsa e Balcão), possua mais liquidez.

Tais características permitem a utilização da Duration e suas variantes para calcular-se a sensibilidade do preço das NTN-Fs em função das variações na taxa de juros.

A Duration conforme apresentada por Macaulay, 1938, trata-se de uma medida de prazo médio. De acordo com Lima (2018), a vantagem da Duration está na consideração do valor do dinheiro no tempo para o cálculo do prazo médio do título. Os fluxos de caixa futuros são

trazidos a valor presente, fornecendo um prazo médio ponderado pelo prazo de cada fluxo de caixa individual, Varanda Neto, Santos e Mello (2019).

Duration de Macaulay:

$$M = \sum_{k=1}^n \frac{P_k \cdot \frac{du_k}{252}}{P} \quad (4)$$

Em que:

$$P_K = \frac{FC_k}{(1+y)^{\frac{du_k}{252}}} = \text{Valor presente de cada cupom} \quad (5)$$

Fonte: Adaptado de Varanda Neto, Santos e Mello (2019).

A fórmula representa a média ponderada dos prazos de recebimento dos fluxos de caixa do título, em que o valor presente de cada fluxo P_k é ponderado pelo prazo $\frac{du_k}{252}$ de recebimento desse fluxo.

A vantagem da *Duration* de Macaulay está em fornecer um instante no tempo em que um único fluxo de caixa pode ser introduzido para representar todos os demais (Varanda Neto; Santos; Mello, 2019).

Em termos práticos, interessa-nos mais identificar a taxa de variação do Preço – em função de uma alteração instantânea e paralela – em relação ao eixo das abcissas da função *Price-Yield* – na *yield*, ou seja, sendo a variação instantânea na *yield* representada por $\Delta y = y_1 - y_0$ e a variação correspondente no Preço por $\Delta P = P_1 - P_0$, com $\Delta y \rightarrow 0$. Dessa forma busca-se investigar $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta y}$, ou seja, $\frac{dP}{dy}$, conforme apresentado por Brandimarte (2017).

No entanto, para obter $\frac{dP}{dy}$ como ΔP , somente em função de Δy , isola-se P na equação, obtendo $\frac{dP}{dy} \cdot \frac{1}{P} = D$ onde D é a *Duration* Modificada:

$$D = \frac{-M}{(1+y)} \quad (6)$$

O sinal negativo de M decorre da relação inversa entre o aumento na taxa de juros – ilustrando a inclinação negativa da reta tangente explicitada por Lima (2018) – e seu efeito no preço do título. Ou seja, quando há um aumento da taxa de juros, ocorre um decréscimo no preço. Inversamente, observa-se a mesma relação, qual seja, quando da diminuição da taxa de juros, ocorre um acréscimo no preço.

Em termos práticos, se um papel tem *Duration* Modificada de D, quando a TIR variar 1 p. p. a maior, o preço do papel irá variar D% a menor. Portanto, a partir de uma mudança em termos percentuais no preço do título, é possível estimar seu novo preço, utilizando a equação abaixo:

$$\hat{p}_1 = P(1 + D * \Delta y) \quad (7)$$

Em que:

P = Preço de mercado do título

D = *Duration* modificada

$\Delta y = y_1 - y_0$ = variação da taxa de juros

$\hat{p}_1$ = Preço do título estimado pela Duration modificada.

Conforme apresentado por Richie, Mautz Junior e Sackley (2010) e Lima (2018), o relacionamento entre preço e taxa de juros apresenta um comportamento não linear.

Essa não linearidade se deve ao fato de que para iguais mudanças na taxa de juros (eixo x – *Yield*) são incorridas diferentes mudanças no preço do título (eixo y – *Price*). As mudanças no preço do título serão crescentes a taxas decrescentes quanto maior a maturidade do título.

Dessa forma, a linearidade local do ponto P_1 , identificada na primeira derivação, diminui quanto maior for Δy . A perda da linearidade local leva a erros na estimação de $\hat{p}_1$. Esses erros podem ser minimizados com a utilização da Convexidade, derivação de segunda ordem da Duration, diminuindo o componente de erro da primeira derivação.

Conforme explicitado por Lima (2018), Smith (2014) e Varanda Neto, Santos e Mello (2019), dadas as características de continuidade e diferenciabilidade da equação P_{NTN-F} em função de y , é possível uma melhor aproximação do valor resultante real da variável dependente P em função de alterações em y , ao utilizar a Expansão de Taylor.

No caso são utilizadas apenas as aproximações de primeira – Duration Modificada – e segunda ordem – Convexidade.

$$C = \frac{1}{(1+y)^2} \sum_{k=1}^n \frac{P_k \left(\frac{du_k}{252}\right) \left(\frac{du_k}{252} + 1\right)}{P} \quad (8)$$

Para a estimação do preço do título utilizando a Duration com Convexidade, tem-se:

$$\hat{p}_2 = P(1 + D * \Delta y + C(\Delta y)^2) \quad (9)$$

Em que:

$\hat{p}_2$ = Preço estimado utilizando *Duration* com Convexidade;

P = Preço de mercado inicial do título (Preço em y_0);

D = *Duration* modificada;

$\Delta y = y_1 - y_0$ = variação da taxa de juros;

C = Convexidade;

Livingston e Zhou (2003, 2005) sugeriram um método alternativo mais preciso para a estimação do preço dadas mudanças na taxa de juros – Duration Exponencial.

Segundo os autores, a Duration Exponencial é baseada nas mudanças no logaritmo natural do preço do título, fornecendo uma melhor aproximação que a Duration com Convexidade. Este método foi testado para um título com 30 anos de maturidade com cupom de 5% ao ano, e obteve desempenho superior para as estimações realizadas com a Duration Modificada e com Duration Modificada com Convexidade.

Conforme apresentado em Livingston e Zhou (2003), a Duration Exponencial:

$$\hat{p}_3 = P(\exp(D)\Delta y) \quad (10)$$

Em que:

$\hat{p}_3$ = Preço estimado utilizando Duration Exponencial;

P = Preço de mercado inicial do título (Preço em y_0);

$\Delta y = y_1 - y_0$ = variação da taxa de juros;

Os autores também propuseram a adição da Convexidade para a Duration Exponencial (Livingston; Zhou, 2003). Maruddani e Hoyyi (2017) aplicaram a metodologia a *bonds* privados, e concluíram que o valor do componente de erro da estimativa proposta é inferior ao valor apresentado utilizando a *Duration* com Convexidade, corroborando a teoria proposta.

$$\hat{p}_4 = P \left(\exp(-D * \Delta y) \exp \left[\left(-\left(\frac{D^2}{2}\right) + C \right) (\Delta y) \right] \right) \quad (11)$$

Com isso, temos as 4 formas para estimação do preço do título que serão avaliadas neste estudo, conforme levantamento feito por Maruddani e Hoyyi (2017):

- a) $\hat{p}_1 = Duration$ Modificada;
- b) $\hat{p}_2 = Duration$ Modificada com Convexidade;
- c) $\hat{p}_3 = Duration$ Exponencial;
- d) $\hat{p}_4 = Duration$ Exponencial com Convexidade.

A avaliação da forma mais eficiente de se calcular a Duration para estimar as alterações nos preços dos títulos será por meio da utilização do Delta-Normal VaR.

Segundo Lima (2018), *Value-at-Risk* trata-se da maior perda potencial para um ativo (individual ou carteira) em um determinado período, a um determinado nível de confiança.

Ainda segundo Lima (2018), é possível realizar essa estimação por meio de análise do histórico da variação dos retornos do ativo analisado – VaR histórico – ou por meio de simulação de cenários – simulação de Monte-Carlo – ou por meio parâmetros alimentados num modelo – denominado VaR paramétrico.

O VaR paramétrico utiliza o desvio-padrão da amostra como input para apuração do VaR, e é apurado como:

$$VaR = Z_{(\alpha)} \sigma P \sqrt{t} \quad (12)$$

No intuito de fornecer uma medida específica para risco de instrumentos de renda-fixa, Jorion (2000) propôs a utilização da Duration Modificada como moduladora do impacto do *Z-Value* sob o preço do título:

$$VaR = PDZ_{(\alpha)} \sigma \quad (13)$$

Onde:

$Z_{(\alpha)}$ = *Z-Value* para uma distribuição normal a um determinado nível de significância;

σ = Volatilidade dos retornos do título;

P = Preço do título;

D = *Duration* Modificada;

t = Período para o qual está se calculando o VaR;

O presente estudo utilizará o modelo paramétrico proposto por Jorion (2000) para a avaliação de desempenho de cada um dos parâmetros de estimação de preço $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \hat{p}_4$ quando comparados com a variação real dos retornos do preço de mercado do título para o período de tempo para o qual está se calculando o VaR.

O *Teste de Kupiec* (Kupiec *et al.*, 1995), é um teste com distribuição χ^2 , onde, conforme exposto por Hull, 2012, a estatística de teste é calculada pela razão de verossimilhança – denotada *LR* – likelihood ratio) entre o total de observações e a quantidade de dias (um dia

equivale a uma observação) em que os retornos negativos excedem o valor limite calculado para aquele dia pelo VaR.

Ou seja, procura identificar se, quando considerada a particularidade da razão entre o número de violações e o total de observações $\left(\frac{N}{T}\right)$, esse número é estatisticamente significativo $\left(\frac{N}{T} < \alpha\right)$ para rejeitar-se a hipótese nula:

$$H_0: p = \hat{p} = \frac{N}{T} < \alpha \quad (14)$$

Para tanto, aplica-se o Teste de Kupiec:

$$LR = -2 \ln[(1 - p)^{T-N} p^N] + 2 \ln[(1 - N/T)^{T-N} (N/T)^N] \quad (15)$$

Em que:

N = total de violações observadas;

T = tamanho da amostra;

p = *P-value* da amostra;

Segundo Fávero e Belfiore (2017) podem ocorrer dois tipos de erro em um teste de hipóteses:

- erro do tipo 1: rejeitar a hipótese nula quando ela for verdadeira. A probabilidade desse erro é representada α ;
- erro do tipo 2: Não rejeitar a hipótese nula quando ela for falsa. A probabilidade desse tipo de erro por β ou $1 - \alpha$.

Portanto, os dois tipos de erros que podem ocorrer neste teste são: i) rejeitar o modelo do VaR quando este é adequado; e ii) aceitar o modelo do VaR quando este é inadequado.

3 Metodologia

Dadas as características de pagamento de cupons de juros periódicos (semestral) fixos e conseqüente precificação baseada em deságio sobre o valor de face, foram escolhidas as NTN-Fs para a realização do estudo. O período escolhido para análise foi de 01/01/2021 a 31/05/2022. Os vencimentos escolhidos foram 01/01/2023, 01/01/2025, 01/01/2027, 01/01/2029, 01/01/2031. O vencimento 01/01/2033 foi excluído por não possuir negociação em todo o período analisado.

Os dados utilizados foram as taxas médias e respectivos preços de mercado para cada título em cada dia de negociação no mercado secundário brasileiro – conforme metodologia estabelecida pela Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (ANBIMA, 2022). Embora utilizada a metodologia supracitada, a fonte primária da taxa de juros básica de mercado brasileira é a curva de futuro DI. Sobre os valores de cada vértice dessa curva em que há vencimentos de NTN-F é adicionado um spread para o título, spread esse que reflete o risco de reinvestimento dos cupons a uma taxa de juros menor, além do risco de default do governo brasileiro. Risco esse que é superior ao risco de default da B3, que por ser uma contraparte central, é considerada como menos arriscada pelos participantes do mercado.

A ANBIMA, em sua metodologia de cálculo para a apuração das taxas médias visa eliminar observações – lances de taxas de compra e venda de título – que estejam incorretas (*outliers*), comprometendo o cálculo da média.

Os dados foram coletados por solicitação via e-mail à ANBIMA, visto que a disponibilidade do histórico dessas informações limita-se ao prazo de alguns poucos dias úteis passados da data em que a consulta é realizada.

Foi considerada a própria data da observação como data de liquidação da operação, desse modo o intervalo em dias úteis para a consideração do cálculo da Duration é a diferença entre a data de vencimento do título e a data da observação.

Os dados fornecidos foram tabulados e analisados utilizando-se o aplicativo Microsoft Excel e Stata.

A análise se deu da seguinte forma: (a) organização dos dados em uma tabela, onde data, taxa e preço unitário (PU) compõem as informações para cada observação; (b) calcular a Duration de Macaulay para cada observação de cada título; (c) calcular a respectiva Duration Modificada; (d) calcular a convexidade; (e) adicionar convexidade a Duration Modificada; (f) calcular a Duration Exponencial e Duration Exponencial com Convexidade.

A seguir, foi calculado o Delta-Normal VaR para cada medida obtida.

O processo se deu por: (a) calcular o logaritmo natural dos retornos diários dos preços; (b) testar a normalidade da distribuição dos retornos utilizando o teste de Shapiro-Wilk; (c) calcular a volatilidade de cada retorno utilizando a Duration Modificada, Duration Modificada com Convexidade, Duration Exponencial e Duration Exponencial com Convexidade; (d) calcular o Delta-Normal VaR para cada um dos 4 parâmetros, para cada um dos vencimentos; (e) comparar os resultados para cada vencimento, e identificar a estimativa que obteve melhor capacidade preditiva – menor número de violações do VaR; (f) aplicar o Teste de Kupiec quando o número de violações do VaR exceder o teto permitido pela medida, a fim de verificar se este número é estatisticamente significativo dada a particularidade da distribuição de retornos em análise.

A capacidade preditiva de cada um dos estimadores $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \hat{p}_4$ para cada vencimento será analisada ao comparar o preço de mercado real de cada dia com o preço estimado $\hat{p}_x$ para aquela data. Será realizada a soma das diferenças de cada estimador com o preço real $p - \hat{p}_n$ para cada vencimento. Dessa forma será possível determinar o melhor estimador global menor diferença entre $p - \hat{p}_n$ considerando todos os vencimentos, e se houveram diferenças no desempenho do estimador para os diferentes vencimentos.

4 Análise dos resultados

Dadas as condições de análise previamente estabelecidas, foi calculada o logaritmo natural dos retornos para cada dia em que houve preço divulgado. Posteriormente foi realizado o teste de Shapiro-Wilk para cada uma das distribuições dos retornos – cada vencimento (F23, F25, F27, F29 e F31) possuindo os retornos estimados $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \hat{p}_4$ e o retorno real p . Totalizando 25 séries. Todas as séries apresentaram resultado negativo para a distribuição normal, com curva assimétrica negativa. Característica devida ao impacto negativo nos preços dos títulos dado os aumentos na taxa de juros.

Foi calculada a Duration de *Macaulay*, Duration Modificada, Duration Modificada com adição da Convexidade, Duration Exponencial e Duration Exponencial com adição da Convexidade para cada estimador de cada vencimento. Em seguida foi calculado o DN-VaR para cada estimador para cada vencimento.

Os VaRs foram calculados os níveis de significância de 90%, 95%, 99% e 99,5%.

Seguindo-se, foram realizados *backtests* para a verificação da significância estatística do número de violações de cada estimador, para tanto aplicou-se o *Teste de Kupiec*. Como resultado o VaR foi dado como calibrado ou não calibrado.

Dado o número de observações comparadas, 355 para cada vencimento para cada intervalo de confiança (IC), os limites superiores e inferiores de violações tolerados são:

Tabela 1 – Tolerância de Violações para o Teste de Kupiec

Intervalo de Confiança	Quantidade de violações toleradas
IC = 90%	24 < N < 44
IC = 95%	10 < N < 26
IC = 99%	1 < N < 7
IC = 99,5%	1 < N < 4

Fonte: os autores.

Os limites superiores são o número máximo de violações que o VaR tolera, se o número de violações observados na amostra for superior a este limite, a interpretação é que o VaR subestimou o valor em risco para o intervalo de confiança testado. O limite inferior diz respeito ao número mínimo de violações necessários para a medida ser considerada válida. A interpretação desde limite é que, caso o número de violações observadas seja inferior a este número o valor em risco calculado para este intervalo de confiança está superestimando o valor em risco.

As tabelas de 2 a 5 trazem o número de violações do VaR para cada estimador para cada vencimento, e o respectivo resultado para o *Teste de Kupiec*:

Tabela 2 – N° de violações com IC = 90%

Vencimento	Duration Modificada	Duration Modificada + Convexidade	Duration Exponencial	Duration Exponencial + Convexidade	Resultado Teste de Kupiec
F23	18	18	18	18	VaR Não Calibrado
F25	26	26	26	26	VaR Calibrado
F27	26	26	26	26	VaR Calibrado
F29	27	27	27	27	VaR Calibrado
F31	29	29	29	29	VaR Calibrado

Fonte: os autores.

Nota-se o VaR não calibrado somente para o primeiro vencimento estudado, 2023. Neste caso, com apenas 18 violações, a medida superestimou as perdas. Para todos os outros vencimentos, a medida se mostrou adequada.

Tabela 3 – N° de violações com IC = 95%

Vencimento	Duration Modificada	Duration Modificada + Convexidade	Duration Exponencial	Duration Exponencial + Convexidade	Resultado Teste de Kupiec
F23	13	13	13	13	VaR Calibrado
F25	14	14	14	14	VaR Calibrado
F27	16	16	16	16	VaR Calibrado
F29	17	17	17	17	VaR Calibrado
F31	18	18	18	18	VaR Calibrado

Fonte: os autores.

Para 95% de confiança, a medida se mostrou eficiente para todos os vencimentos testados.

Foi o único intervalo de confiança que se mostrou eficiente para todos os vencimentos.

Tabela 4 – N° de violações com com IC = 99%

Vencimento	Duration Modificada	Duration Modificada + Convexidade	Duration Exponencial	Duration Exponencial + Convexidade	Resultado Teste de Kupiec
F23	6	6	6	6	VaR Calibrado
F25	5	5	5	5	VaR Calibrado
F27	9	9	9	9	VaR Não Calibrado
F29	8	9	8	9	VaR Não Calibrado
F31	10	10	10	10	VaR Não Calibrado

Fonte: os autores.

Para 99% de confiança, apenas para os dois primeiros vencimentos a medida se mostrou capaz de prever o valor em risco. Para os demais, o número de violações foi maior conforme mais distante era o vencimento do título.

Tabela 5 – N° de violações com IC = 99,5%

Vencimento	Duration Modificada	Duration Modificada + Convexidade	Duration Exponencial	Duration Exponencial + Convexidade	Resultado Teste de Kupiec
F23	6	6	6	6	VaR Não Calibrado
F25	5	5	5	5	VaR Não Calibrado
F27	6	6	6	6	VaR Não Calibrado
F29	7	7	7	7	VaR Não Calibrado
F31	7	7	7	7	VaR Não Calibrado

Fonte: os autores.

Para 99,5% de confiança, o valor em risco calculado não se mostrou uma medida calibrada para nenhum vencimento de título.

Avaliando-se a eficácia dos estimadores $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \hat{p}_4$ entre si na previsão do preço real, com exceção do vencimento F29 para 99% de confiança, todos apresentaram o mesmo número de violações para cada vencimento.

Dessa forma, não é possível afirmar que há um estimador que em termos de maior efetividade – menor nível de violações – tenha tido um desempenho significativamente melhor que os demais.

Mesmo considerando o período de alta de juros alvo deste estudo, o VaR com índice de confiança satisfatório (95%) se mostrou uma ferramenta adequada para aferição da maior perda possível em valor de mercado para NTN-Fs (F23, F25, F27, F29 e F31) em único dia.

Porém, mesmo com a não tradução das diferenças entre cada estimador e o preço real para cada data em diferentes números de violações no VaR, isso ainda não responde à pergunta deste estudo, qual estimador obteve melhor desempenho na capacidade preditiva do preço real, $\hat{p}_n - p$.

Somando-se todas as diferenças entre $p - \hat{p}_n$, e organizando por vencimento, obteve-se as seguintes informações do Quadro 1, e a soma das diferenças de cada estimador na Tabela 2.

Quadro 1 – Total de erros por estimador para cada vencimento

F23			
$p - \hat{p}_1$	$p - \hat{p}_2$	$p - \hat{p}_3$	$p - \hat{p}_4$
R\$ 14,1598	R\$ 12,7127	R\$ 14,1531	R\$ 12,7130
F25			
$p - \hat{p}_1$	$p - \hat{p}_2$	$p - \hat{p}_3$	$p - \hat{p}_4$
R\$ 22,8901	R\$ 15,3146	R\$ 22,8573	R\$ 15,3157
F27			
$p - \hat{p}_1$	$p - \hat{p}_2$	$p - \hat{p}_3$	$p - \hat{p}_4$
R\$ 27,7366	R\$ 13,9521	R\$ 27,6754	R\$ 13,9533
F29			
$p - \hat{p}_1$	$p - \hat{p}_2$	$p - \hat{p}_3$	$p - \hat{p}_4$
R\$ 31,6673	R\$ 12,4915	R\$ 31,5843	R\$ 12,4950
F31			
$p - \hat{p}_1$	$p - \hat{p}_2$	$p - \hat{p}_3$	$p - \hat{p}_4$
R\$ 34,4193	R\$ 11,0680	R\$ 34,31	R\$ 11,0719

Fonte: os autores.

Quadro 2 – Erros totais por estimador para todos os vencimentos

Erros totais por estimador			
$p - \hat{p}_1$	$p - \hat{p}_2$	$p - \hat{p}_3$	$p - \hat{p}_4$
R\$ 130,8730	R\$ 65,5389	R\$ 130,5880	R\$ 65,5488

Fonte: os autores.

Assumindo-se que o estimador que possui melhor capacidade preditiva é o que apresenta valor mais próximo ao valor observado da variável real, segue-se que, quanto menor o valor de $p - \hat{p}_n$, melhor o desempenho do estimador.

O estimador que obteve melhor desempenho foi $\hat{p}_2$ – Duration Modificada com Convexidade - apresentando um erro total de R\$ 65,5389. Comparando com a outra estimação com menor expectativa de erro $\hat{p}_4$ – Duration Exponencial com Convexidade, $\hat{p}_2$ obteve um desempenho 0,0151% superior.

Ou seja, quando adicionada a Convexidade, o método exponencial obteve uma maior imprecisão do que o método tradicional. Embora a diferença seja mínima.

No entanto, ao comparar $\hat{p}_1$ – Duration Modificada – com $\hat{p}_3$ – Duration Exponencial – o método $\hat{p}_3$ obteve um desempenho 0,2183% superior ao de $\hat{p}_1$.

Conclui-se, portanto, que o estimador com maior capacidade preditiva foi $\hat{p}_2$, seguido por $\hat{p}_4$, $\hat{p}_3$, e $\hat{p}_1$.

Conforme exposto por Livingston e Zhou (2005), a Duration Exponencial obteve um desempenho melhor que método tradicional. Porém, a adição da aproximação de segunda ordem não foi eficaz no método exponencial tanto quanto foi no método tradicional.

Conclui-se que as medidas tradicionais e exponenciais de aproximação de primeira e segunda ordem obtiveram desempenho muito similar entre si, reforçando a validade destes indicadores em momentos de stress econômico. Observa-se, porém, que o nível de confiança que obteve melhor desempenho no VaR foi o de 95%. Resultado semelhante ao estudo de Andjelic, Djakovic e Radisic (2010), e de Obadović *et al.* (2016). No primeiro, a 95% de confiança, o método paramétrico se mostrou superior à simulação histórica. E na segunda pesquisa, o intervalo de confiança que foi considerado calibrado, por meio da execução de *backtests*, para todos os vencimentos de títulos – mesma aplicação que o presente estudo – foi o de 95%.

É importante notar que embora o aumento dos juros no período estudado, refletido em última instância nas elevações da taxa de juros básica da economia, a SELIC, este é demonstrado inicialmente nas negociações no mercado de juros brasileiro – mercado secundário de títulos públicos e o mercado futuro de taxa DI. Dessa maneira, as informações sobre o mercado monetário brasileiro são absorvidas pelos agentes quase que instantaneamente e de forma perene, traduzindo-se em perturbações constantes nas taxas de juros dos instrumentos prefixados.

Ou seja, embora no período as elevações na taxa de juros tenham sido de grande magnitude, essas se deram de forma constante e distribuídas no tempo, o que permitiu uma melhor absorção pelo mercado.

Futuros estudos contribuiriam com este campo ao testar o desempenho destes estimadores em situações de elevado stress econômico, no qual o aumento da taxa básica de juros pela autoridade monetária não fosse previsto, principalmente em questão de magnitude, pelos agentes econômicos.

5 Considerações finais

Este estudo possuiu como motivação a aplicação em tempos de elevado stress social e consequentemente econômico a aplicação de metodologias de avaliação de risco de títulos de renda fixa amplamente utilizadas, e seu respectivo desempenho no momento em questão.

O estudo demonstrou, através do Delta-Normal VaR que a aplicação das métricas já consagradas da Duration Modificada e a Duration Modificada com adição da Convexidade continuam podendo ser utilizadas como métodos eficientes de previsão de preço para perturbações na taxa de juros incidente. Mesmo em momentos adversos.

Em adição, foram testadas a Duration Exponencial e a Duration Exponencial com adição da Convexidade. Algo que ainda não havia sido academicamente testado e publicado para o mercado brasileiro. Tornando o trabalho inovador neste sentido.

Os resultados das previsões pelo Delta-Normal VaR foram assegurados por *backtests* realizados utilizando o *Teste de Kupiec*, outra metodologia amplamente utilizada para avaliar a representatividade de violações do VaR dado o tamanho da amostra e o nível de significância testados.

A utilização destes métodos leva o trabalho à pode ser comparado com outros estudos semelhantes realizados em outros contextos, contribuindo para a construção do conhecimento científico em finanças.

Referências

ANDJELIC, G.; DJAKOVIC, V.; RADISIC, S. Application of VaR in emerging markets: A case of selected Central and Eastern European Countries. **African Journal of Business Management**, [s. l.], v. 4, n. 17, p. 3666-3680, 2010. Disponível em:

<https://academicjournals.org/journal/AJBM/article-full-text-pdf/7A28C1115601>

Acesso em: 15 ago. 2023

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS ENTIDADES DOS MERCADOS FINANCEIRO E DE CAPITAIS (ANBIMA). **Metodologias ANBIMA de precificação**: versão agosto 2023. São Paulo: ANBIMA, 2023. Disponível em:

https://www.anbima.com.br/pt_br/informar/ferramenta/precos-e-indices/taxas-titulos-publicos.htm. Acesso em: 18 ago. 2023.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Taxas de juros básicas**: histórico. Brasília, DF, c2022.

Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/historicotaxasjuros>. Acesso em: 30 maio 2022.

BRANDIMARTE, P. **An introduction to financial markets**: A quantitative approach. New Jersey: John Wiley & Sons, 2017.

CUPPARI, A. M. **A estrutura a termo das taxas de juros e estratégia de imunização de uma carteira de renda fixa via duration**. 2015. 37 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Curso de Ciências Econômicas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2015. Disponível em:

<https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/134824/Monografia%20do%20Alexandre%20Mar%20a7on%20Cuppri.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 10 jul.

2023

DAS, N. M.; ROUT, B. S. Impact of COVID-19 on market risk: appraisal with value-at-risk models. **The Indian Economic Journal**, New Delhi, v. 68, n. 3, p. 396-416, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1177/00194662209818>. Acesso em: 16 ago. 2023.

DI ASIH, I. M.; ABDURAKHMAN, A. Delta-Normal Value at risk using exponential duration with convexity for measuring government bond risk. **DLSU Business & Economics Review**, [s. l.], v. 31, n. 1, p. 72-80, 2021. Disponível em https://www.dlsu.edu.ph/wp-content/uploads/2021/08/DLSUBER.2021.July_.6maruddani-revised.pdf. Acesso em 10 jul. 2023.

DUAN, Y. *et al.* Bank systemic risk around COVID-19: A cross-country analysis. **Journal of Banking & Finance**, Amsterdam, v. 133, p. 106299, 2021. Disponível em:

<https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2021.106299>. Acesso em: 16 ago. 2023.

FÁVERO, L. P.; BELFIORE, P. **Manual de análise de dados**: estatística e modelagem multivariada com Excel®, SPSS® e Stata®. São Paulo: Grupo GEN, 2017.

FISHER, L.; WEIL, R. L. Fluctuations: Returns to bondholders from naive and optimal strategies. **Journal of Business**, Chicago, v. 44, n. 4, p. 408-431, 1971. Disponível em:

<http://www.jstor.org/stable/2352056>. Acesso em 10 jul. 2023.

GAIO, L. E. **Value at Risk no mercado financeiro internacional**: avaliação da performance dos modelos nos países desenvolvidos e emergentes. 2015. Tese (Doutorado em Administração de Organizações) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, São Paulo, Ribeirão Preto, 2015. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/96/96132/tde-20072015-155257/publico/LuizEGaio_Corrigida.pdf.

JORION, P. **Value at risk**. 2nd ed. Philadelphia: McGraw-Hill, 2000.

KUPIEC, P. H. *et al.* Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. **Journal of Derivatives**, [s. l.], v. 3, p. 73-84, 1995. Disponível em <https://doi.org/10.3905/jod.1995.407942>.

LIMA, F. G. **Análise de riscos**. 2. ed. São Paulo: Grupo GEN, 2018.

LIVINGSTON, M.; ZHOU, L. A highly accurate measure of bond price sensitivity to interest rates. *In*: SSRN. [S. l.], 2003. Disponível em: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=366801. Acesso em: 16 ago. 2023.

LIVINGSTON, M.; ZHOU, L. Exponential duration: A more accurate estimation of interest rate risk. **Journal of Financial Research**, [s. l.], v. 28, n. 3, p. 343-361, 2005. Disponível em <https://site.warrington.ufl.edu/miles-livingston/files/2019/06/Exponential-Duration-a-More-Accurate-Estimation-of-Interest-Rate-Risk.pdf>.

MACAULAY, F. R. Front matter. *In*: MACAULAY, F. R. **Some theoretical problems suggested by the movements of interest rates, bond yields and stock prices in the United States since 1856**. Cambridge: NBER, 1938. p. 15-16. Disponível em: <https://www.nber.org/books-and-chapters/some-theoretical-problems-suggested-movements-interest-rates-bond-yields-and-stock-prices-united>. Acesso em 01 jul. 2023

MARTINS, B. M. M. **Decomposição da curva de juros brasileira**. 2020. 52 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Macroeconomia e Finanças, Departamento de Economia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: https://www.econ.puc-rio.br/uploads/adm/trabalhos/files/Dissertacao_Breno_Martins.pdf. Acesso em 09 jul. 2023

MARUDDANI, D. A. I.; HOYYI, A. Perbandingan sensitivitas harga obligasi berdasarkan durasi macaulay dan durasi eksponensial dengan pengaruh konveksitas (Studi Empiris pada Data Obligasi Korporasi Indonesia yang Terbit Tahun 2015). **Media Statistika**, [s. l.], v. 10, n. 1, p. 25-36, 2017. Disponível em <https://doi.org/10.14710/medstat.10.1.25-36>. Acesso em 01 jul. 2023.

OBADOVIĆ, M. *et al.* Assessing the accuracy of delta-normal VaR evaluation for Serbian government bond portfolio. **Economic Research-Ekonomska Istraživanja**, [s. l.], v. 29, n. 1, p. 475-485, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/1331677X.2016.1174391>. Acesso em: 16 ago. 2023.

PINHEIRO, M. C.; FERNANDES, B. V. R. Abordagem internacional de VaR: backtesting para diferentes mercados de capitais. **Revista Contabilidade & Finanças**, São Paulo, v. 31, n. 83, p. 318-331, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1808-057x201909160>. Acesso em: 16 ago. 2022.

RICHIE, N. F.; MAUTZ JUNIOR, R. D.; SACKLEY, W. H. Duration and convexity for assessing interest rate risk: duration analysis improves interest rate analysis by considering the balance-sheet impact of changes in interest rates. **Bank Accounting & Finance**, [s. l.], v. 23, n. 2, p. 25-31, 2010. Disponível em <https://link.gale.com/apps/doc/A221600778/AONE?u=anon~346ebcb5&sid=googleScholar&xid=f4fc6c0c>. Acesso em 12 dez. 2022.

RIZWAN, M. S.; AHMAD, G.; ASHRAF, D. Systemic risk: The impact of COVID-19. **Finance Research Letters**, Amsterdam, v. 36, p. 101682, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.frl.2020.101682>. Acesso em: 16 ago. 2023.

SHAIK, M.; PADMAKUMARI, L. Value-at-risk (VAR) estimation and backtesting during COVID-19: Empirical analysis based on BRICS and US stock markets. **Investment Management and Financial Innovations**, Sumy, v. 19, n. 1, p. 51-63, 2022. Disponível: [http://dx.doi.org/10.21511/imfi.19\(1\).2022.04](http://dx.doi.org/10.21511/imfi.19(1).2022.04). Acesso em 24 Dez. 2022,

SMITH, D. J. **Bond math, + website**: The theory behind the formulas. New Jersey: John Wiley & Sons, 2014.

SOUZA, A. S. **Aplicação da análise de componentes principais na curva de juros real e nominal brasileira e a efetividade do hedge no mercado de debentures**. Dissertação (Mestrado Profissional em Economia) – Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, São Paulo, 2016. Disponível: <https://repositorio.insper.edu.br/handle/11224/1709>. Acesso em 01 jul. De 2023.

SOUZA, J. C. F. *et al.* Uso do Value-at-Risk (VaR) para mensuração de risco em fundos de investimento de renda fixa a partir do modelo delta-normal e simulação de Monte Carlo. **Revista de Gestão, Finanças e Contabilidade**, Senhor do Bonfim, v. 7, n. 1, p. 60-77, 2017. Disponível em: <https://www.revistas.uneb.br/index.php/financ/article/view/2448>. Acesso em: 16 ago. 2023.

VARANDA NETO, J. M.; SANTOS, J. C. S.; MELLO, E. M. **O mercado de renda fixa no Brasil**: conceitos, precificação e riscos. São Paulo: Saint Paul Publishing, 2019.

WU, D.; THANYALUCKPARK, C. Value at risk performance in BRICS countries. *In*: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON CYBERNETICS (CYBCONF), 4., 2019, Beijing. **Proceedings** [...]. Piscataway: IEEE, 2019. Disponível [10.1109/Cybcnf47073.2019.9436572](https://doi.org/10.1109/Cybcnf47073.2019.9436572). Acesso em 01 dez. 2022.