ANÁLISE DAS TEORIAS DE PORTFÓLIO: EXISTE MAIS DO QUE APENAS MARKOWITZ

ANALYSIS OF PORTFOLIO THEORIES: THERE IS MORE THAN JUST MARKOWITZ

Yan Lucas Gabor Sampaio
Pós-Graduado em Mercado de Capitais - FECAP
yanlucassampaio@hotmail.com

José Orcélio do Nascimento
Professor da Fundação Escola de Comércio Álvares Penteado - FECAP
jorcelio@uol.com.br

Carlos Augusto Nakano
Professor do Instituto Mauá de Tecnologia
carlos.nakano@uscsonline.com.br

Elubian de Moraes Sanchez
Professora da Fundação Escola de Comércio Álvares Penteado – FECAP
elubian.sanchez@fecap.br

Leonardo Fabris Lugoboni
Professor da Universidade Federal de São Paulo
leonardo.lugoboni@unifesp.br

Marcus Vinicius Moreira Zittei
Professor do Centro Universitário das Faculdades Metropolitanas Unidas - FMU
marcus.zittei@fmu.br

CONTABILOMETRIA

Resumo do processo editorial:
a) Submissão em: 24/08//2023.
b) Envio para avaliação em: 25/12/2023.
c) Término da avaliação em: 08/01/2024.
d) Correções solicitadas em: 09/01/2024.
e) Recebimento da versão ajustada em: 18/01/2024.
f) Aprovação final em: 24/01/2024.

Resumo
A teoria de portfólios teve início em Markowitz e seu portfólio de média-variância, tornando-se o portfólio mais difundido no meio acadêmico e até mesmo entre investidores. Apesar disso, outros modelos foram propostos como o portfólio de semivariância e o portfólio de maximização da média geométrica, possuindo propriedades atrativas aos praticantes, apesar de receberam pouca atenção do mercado financeiro em geral. O objetivo deste trabalho é compará-los e entender suas diferenças de risco e performance, para que o investidor possa entender essas teorias e definir qual delas está mais alinhada aos seus interesses. Para atingir esse objetivo, foram extraídos retornos mensais de 10 diferentes ações presentes no índice IBrX100, gerando 10.000 amostras por meio do *bootstrap* em blocos, sendo que para cada amostra foi gerado um portfólio otimizado de acordo com cada estratégia, dessa forma analisando o desempenho de cada uma nos mais diferentes cenários. Os dados mostram que a estratégia de maximização da média geométrica, fracionária ou não, apresentou os melhores resultados, podendo servir de grande uso ao investidor, seja seu objetivo a maximização do retorno ou a minimização do risco e incerteza.

Palavras-chave: portfólio; bootstrap; otimização.

Abstract
Portfolio theory began with Markowitz and his mean-variance portfolio, becoming the most widespread portfolio in academia and even among investors. Despite this, other models were proposed, such as the semivariance portfolio and the geometric mean maximization portfolio, having attractive properties for practitioners, despite receiving little attention from the financial market in general. The objective of this work is to compare them and understand their differences in risk and performance, so that investors can understand these theories and define which one is most aligned with their interests. To achieve this objective, monthly returns were extracted from 10 different stocks present in the IBrX100 index, generating 10,000 samples through block bootstrap, and for each sample an optimized portfolio was generated according to each strategy, thus analyzing the performance of each in the most different scenarios. The data shows that the strategy of maximizing the geometric mean, fractional or not, presented the best results, and can be of great use to investors, whether their objective is to maximize return or minimize risk and uncertainty.

Keywords: portfolio; bootstrap; optimization.

1 Introdução

Diversos ativos estão disponíveis ao investidor no mercado de capitais e a decisão de investir ou não em um ativo específico, depende de uma análise a respeito das perspectivas de crescimento de uma companhia, sua liquidez financeira, seus fluxos de caixa e os objetivos do investidor. É natural que múltiplos ativos sejam atrativos ao investidor ao mesmo tempo, mas qual deveria ser a alocação ideal dentre todos os ativos que o compõe?

A distribuição de um portfólio de ativos é uma tarefa que impacta diretamente no futuro financeiro do investidor. Ao concentrar uma parcela muito grande de capital em apenas um ativo, o futuro poderá cobrar caro, porém distribuir o capital em dezenas de diferentes ativos pode levar a um retorno medíocre.

A base da teoria moderna de portfólios (TMP) teve início com Markowitz (1952; 1959) e teve adições com Sharpe (1964; 1966), tendo como pilar a ideia de que o investidor considera o retorno esperado de um ativo algo desejável, enquanto a variação dos retornos desse mesmo ativo algo indesejável, sendo esse um *trade-off* que todos os investidores terão de lidar. A teoria sofreu muitas críticas quanto as suposições de seu modelo, como podem ser consultados no trabalho de Omisore, Yusuf e Christopher (2012). As principais estão direcionadas a variância como medida de risco e a suposição de uma distribuição normal dos retornos dos ativos.

A variância, segundo Leippold (2012), possui algumas deficiências caso o mercado não possua uma distribuição simétrica ou uma função quadrática de utilidade. Mandelbrot e Taleb (2007) também criticaram a distribuição normal, já que ela não leva em conta grandes flutuações de preços. Dessa forma, com os trabalhos de Rom e Ferguson (1993), e, posteriormente, Sortino e Satchell (2001), iniciou-se a chama teoria pós-moderna de portfólios (TPMP), que substituía a variância pela semivariância dos retornos negativos, instituindo uma estatística chamada de *downside risk* (DR) ou risco de queda, que levaria em consideração a probabilidade de se ter um retorno abaixo do retorno mínimo aceitável (RMA) definido pelo investidor, bem como sua magnitude. Além disso, o modelo suportava maior flexibilidade quanto as distribuições dos retornos, levando em consideração a assimetria da distribuição.

Outra forma de seleção de portfólios, chamada de critério de Kelly ou maximização da média geométrica (MMG), diferente dos modelos de TMP e TPMP, é uma estratégia de multiperíodos, em comparação as anteriores que são consideradas com estratégias de uniperíodo, o que significa que ao invés de se concentrar no resultado da carteira no fim do período, ela leva em consideração todos os períodos até ele (Thorp, 2011).

Tendo suas bases em Bernoulli (1738), Kelly (1956) e Latané (1959), ela consiste em utilizar um princípio multiplicativo e a função logarítmica de utilidade para avaliar o valor esperado de determinado evento. A estratégia busca maximizar a taxa de retorno do portfólio, ao mesmo tempo que evita o risco de ruína da carteira (MacLean *et al.*, 2011), atingindo determinado nível de riqueza em um tempo cada vez menor, à medida que o número de períodos aumenta. Outro ponto relevante é que, diferente dos modelos citados anteriormente, a MMG não possui suposições quanto a distribuição dos retornos.

Apesar das características positivas da estratégia, no curto-prazo a MMG poderá levar a grandes variações no valor do portfólio, podendo resultar em uma grande perda de capital como criticado por Samuelson (1979). Isso foi comfirmado nos trabalhos de Estrada (2010) e Carta e Conversano (2020), em que os portfólios otimizados por MMG possuem maior volatilidade, se comparado aos outros.

Com tantas possibilidades, se torna difícil ao investidor comum decidir, entre as estratégias, aquela que mais se adequa às suas necessidades e objetivos. Faz-se necessário então defini-las de forma objetiva, citando suas características, além de comparar os resultados ao se empregar cada uma delas. Para isso, pode-se assumir que os investidores geralmente possuem o desejo de atingir um determinado montante de capital no menor tempo possível, ao mesmo tempo que minimizam a possibilidade de se perder parte ou a totalidade do capital investido.

O objetivo deste artigo é comparar a performance e risco dos diferentes portfólios, de maneira que seja possível ao investidor selecionar e compreender àquele que mais se adeque ao seu perfil. Para que seja possível atingir o objetivo citado, serão analisados os graus de incerteza e desempenho para cada portfólio, verificando a amplitude de possíveis resultados ao final do período investido, seu retorno acumulado, possibilidade de perda de capital investido, máximo *drawdown* e tempo médio para se atingir determinado objetivo financeiro.

O trabalho irá servir diretamente ao investidor, apresentando comparações dentre os diferentes modelos de portfólio, junto de suas características e fundamentações. Também irá contribuir a literatura, em específico aos trabalhos de Estrada (2010) e Carta e Conversano (2020), adicionando a Teoria Pós-moderna de Portfólios na comparação, utilizando o *bootstrap* como ferramenta para estruturação destes portfólios de maneira a reduzir os erros de estimativa dos modelos.

2 Referencial Teórico

Como referencial teórico foram elencados os conceitos e principais aspectos da teoria moderna de portfólios, da teoria pós-moderna de portfólios, da maximização da média geométrica e de *bootstrap*.

2.1 Teoria moderna de portfólios

A base da teoria de construção de portfólios se iniciou com Markowitz (1952; 1959), segundo ele o investidor considera o retorno esperado algo desejável, enquanto a variância de seu retorno é tida como indesejável. O pilar de sua teoria implica em um trade-off entre risco e retorno, aquele portfólio que possui o maior retorno esperado provavelmente não será o de menor variância. Aumentar o retorno significa aceitar um aumento na volatilidade da carteira e diminuir a volatilidade, o que, por sua vez, implica em uma diminuição no retorno, não há como escapar disso.

Apesar disso, é possível encontrar diversas carteiras que possuem retornos diferentes, para um mesmo nível de risco. A fronteira eficiente gerada pela otimização de média-variância (MV), coloca em evidência todas as combinações de diferentes ativos em um gráfico, sendo eficientes apenas àquelas carteiras que maximizem o retorno para um determinado nível de risco, enquanto todas àquelas que se encontram abaixo dessa fronteira são os portfólios ineficientes ou não-otimizados, cabendo ao investidor selecionar uma das carteiras da fronteira eficiente que mais se adeque ao seu perfil de risco.

A otimização de MV também implica na diversificação de portfólios, isso não significa que qualquer portfólio composto por diferentes ativos atinja esse critério, pois a teoria aponta que a diversificação deva ser realizada da maneira correta e pelo motivo correto (Markowitz, 1952). Para isso, a carteira deverá ser composta por ativos que possuam baixa correlação entre si, diminuindo a variância da carteira.

Outra métrica importante para a seleção de uma carteira de ativos, que também está baseada na MV, foi proposta por Sharpe (1966). Segundo ele, o melhor portfólio é aquele que possui um maior retorno, acima da taxa livre de risco, para dado nível de risco (Medido pelo desvio padrão dos retornos), sendo conhecido por Índice de Sharpe. Dessa forma, uma maneira objetiva de selecionar um portfólio dentre àqueles propostos pela fronteira eficiente, seria selecionar o que possui maior índice de Sharpe.

Outra contribuição de Sharpe está no modelo de precificação de ativos financeiros (CAPM), explorando ainda mais o risco e diversificação, separando-o entre risco diversificável e não-diversificável, apresentando mais uma razão para a diversificação de ativos na criação de um portfólio. Como pode ser observado em Omisore, Yusuf e Christopher (2012), o modelo apresentando por Markowtiz e Sharpe assumem características que não representam a realidade. A otimização por MV assume uma distribuição normal ao ter como parâmetros medidas como média e variância, que não representam de forma adequada o risco dos eventos mais improváveis, criticado por Mandelbrot e Taleb (2007), em que quaisquer medidas atribuídas a distribuição normal não poderão representar o risco de grandes flutuações. Além disso, a variância por si só é criticada como medida de risco, já que é uma medida simétrica, o que não representa a verdadeira preocupação dos investidores (Rom; Ferguson, 1993).

A MV também é extremamente sensível as estimativas de retorno, variância e covariâncias, pequenas alterações nesses parâmetros irão acarretar grandes alterações na composição dos portfólios eficientes. Chopra e Ziemba (1993) mostram que erros de estimação da média são mais impactantes que os da variância, que por fim, são mais impactantes que as covariâncias, sendo que o primeiro impacta o portfólio, pelo menos 10x mais do que as outras métricas.

2.2 Teoria pós-moderna de portfólios

Como forma de otimizar o modelo proposto por Markowitz, a teoria pós-moderna de portfólios busca por soluções aos problemas inerentes a MV. A principal mudança se deve a mensuração do risco e a relação do modelo com a distribuição normal. Segundo Rom e Ferguson (1993), ambas possuem uma grande limitação em comum, elas são simétricas. Isso implica que retornos acima da média sejam tão arriscados àqueles abaixo da média, obscurecendo a informação que realmente importa ao investidor. Leippold (2012) também afirma que o uso da variância como medida de risco possui algumas deficiências e caso os mercados não possuam uma distribuição simétrica ou função quadrática de utilidade, então meios alternativos serão necessários para expressar o risco de um investimento.

Como medida substituta a variância, a teoria pós-moderna de portfólios (TPMP) utiliza a semivariância, uma métrica já apresentada por Markowitz (1959), comparando-a com a variância, a última possui as vantagens de ser mais conveniente, familiar e menor custosa, já que a primeira necessita de um maior poder computacional. Segundo ele, a semivariância gera melhores portfólios, se comparado com a variância. Concordando com o resultado encontrado por Nóbrega e Machado (2016) em que a semivariância se apresentou superior a variância, acarretando uma maior proteção em relação à perda de capital.

Para tornar a necessidade de uma distribuição de probabilidades mais flexível, a TPMP permite o uso de uma distribuição normal de três parâmetros, sendo descrita pela média, variância e sua assimétrica, Rom e Ferguson (1993) afirma que diferentes classes de ativos possuem diferentes graus de assimetria, o que é evidência robusta de que a necessidade de distribuições simétricas levará a resultados incorretos, e que por conta de uma representação mais aproxima da distribuição do ativo, a TPMP levará a resultados mais precisos.

Outra adição a teoria, foi na possível substituição da média pelo retorno mínimo aceitável (RMA), dessa forma, a medida de risco levaria em consideração as chances de se obter um retorno abaixo da RMA, colocando os objetivos e preferências do investidor dentro do modelo. Sortino e Satchell (2001) define como o risco de queda (*Downside risk* - DR), a probabilidade de que o retorno seja inferior a RMA e a magnitude desse retorno, junto da média das quedas abaixo da RMA. Rocha (2016) realiza a comparação entre os dois modelos, mostrando que os portfólios selecionados através da TPMP possuem ativos que tenham uma assimetria positiva e leptocurtose (distribuições que apresentem caudas gordas), atingindo maiores retornos do que aqueles otimizados pela TMP. Geambasu (2013) também afirma que a TPMP cobre a falta de flexibilidade e adaptação da TMP, mensurando o risco de acordo com os requerimentos do investidor.

2.3 Maximização da média geométrica

Outra teoria para seleção de portfólios teve início com Daniel Bernoulli, com uma nova proposta de mensuração de risco, que até então era feita pela expectativa matemática. Bernoulli (1738) afirma que a determinação do valor de um item não deva ser feita através de seu preço, mas sim por sua utilidade e que qualquer quantidade desse mesmo item, irá reduzir a utilidade dos bens já possuídos. Dessa forma, Bernoulli estabeleceu uma forma de representar a aversão ao risco, de forma matemática e mensurável.

Apesar disso, a utilidade não era seu objetivo, mas sim uma ferramenta. Uma maneira multiplicativa de se verificar o valor esperado de eventos incertos, diferente da média aritmética, seria o uso da média geométrica. Além de levar em consideração os eventos de forma multiplicativa, ela também leva em consideração a maximização da utilidade, assim ela também incorpora a aversão ao risco inerente ao ser-humano. Para exemplificar, imagine que haja 99% de chance de se ganhar R$ 1.000.000 em uma aposta, mas 1% de chance de perder tud, saindo da aposta com R$ 0. O cálculo da média geométrica seria o seguinte:

$$\sqrt[100]{1.000.000^{99}.0^{1}} = 0 \qquad (1)$$

O valor esperado seria de zero, pois, como o efeito é multiplicativo, a mínima chance de perder todo o dinheiro seria suficiente para não participar da aposta. Caso a aposta fosse feita de forma recorrente, a medida em que se aumenta o número de períodos, a chance de sair dela sem nada é praticamente certa.

Outro pesquisador a sugerir a MMG foi John Kelly. Ao estudar a forma de atingir um aumento exponencial de riqueza, é necessária a maximização do valor esperado do logaritmo de seu capital (Kelly, 1956). Assim, Kelly atinge a mesma proposta de Bernoulli, a média geométrica seria a chave para atingir a maior taxa exponencial de crescimento de capital.

Apesar de Kelly sugerir que essa estratégia possa ser aplicada em outros campos econômicos, além do mundo de apostas, isso só foi especificado por Henry Latané, sendo o primeiro a sugerir a MMG na seleção de ativos que poderão compor um portfólio. O objetivo do investidor é obter o maior valor possível ao fim de N períodos, como isso depende de diferentes variáveis, sendo necessária uma parcela de sorte, para que seja possível definir uma estratégia que possa atingir esse objetivo, é necessária a maximização da utilidade esperada (Latané, 1959).

A MMG também é uma estratégia míope, o que significa que a maximização da taxa de crescimento pode ser atingida com base apenas no capital atual, não sendo necessário o conhecimento do futuro ou da distribuição de probabilidade dos retornos, como apresentado por MacLean *et al*. (2011). Além disso, demonstra que essa estratégia permite a seleção de um único portfólio otimizado, diferente do critério de MV proposto por Markowitz. Outro ponto positivo ao maximizar-se a média geométrica da riqueza final, está no fato de que essa estratégia permite que o investidor atinja um objetivo financeiro, de uma forma muito rápida, minimizando o tempo necessário para que o atinja (Breiman, 1969).

Paul Samuelson foi o maior crítico da estratégia, disputando a premissa implícita de que a MMG seja prudente para quaisquer funções de utilidade, além da função de utilidade logarítmica (Samuelson, 1971). Esse ponto também foi apontado como verdadeiro por Thorp (1972), em que a MMG possa não fazer sentido para outras funções de utilidade.

Outra crítica aponta para a característica de que, dado uma grande quantidade N de períodos, a taxa de crescimento de capital se aproximaria daquela calculada pelo critério. Conforme o número de períodos N aumenta, a taxa de retorno pode se aproximar àquela calculada, mas também pode ser inferior, talvez até mais inferior do que o investidor possa suportar (Samuelson, 1979). Samuelson apenas elucida alguns pontos teóricos, que não alteram a prática do critério, mas que auxiliam na elucidação de suas limitações, evitando que se assumam como verdadeiros, pontos que não fazem parte da estratégia.

Thorp (2011) também verificou a possibilidade de se utilizar estratégias de MMG fracionárias (alocando uma porcentagem menor do que a definida pelo critério), como uma forma de reduzir a volatilidade do portfólio, já que a MMG pode ser muito arriscada para a maioria das pessoas, assim evitando as grandes variações de capital inerentes a estratégia.

Estrada (2010) e Carta e Conversano (2020) realizaram testes entre os diferentes tipos de portfólios, incluindo a otimização de MV, portfólios de Kelly completo e fracionários, mostrando que normalmente, os portfólios otimizados de acordo com a MMG são menos diversificados, possuem maior variância e maior retorno esperado.

2.4 *Bootstrap*

O *bootstrap* é um método computacional de reamostragem com reposição, inicialmente proposto por Efron (1979), capaz de estimar a distribuição de um conjunto de dados, intervalos de confiança e testes de hipótese, que segundo Horowitz (2001) são mais confiáveis do que aproximações assintóticas de primeira ordem.

Para se estimar a distribuição de uma amostra de variável X (será considerada como a população) e dela serão retiradas N amostras de forma aleatória, com reposição dessas variáveis. Com essas amostras, será possível computar uma estimativa de interesse, como a média, e criar uma distribuição amostral dessa estatística (Bruce; Bruce, 2017).

O método descrito anteriormente é indicado para variáveis independentes e identicamente distribuídas (IID), porém quando as variáveis possuem algum grau de dependência, as amostras coletadas poderão não preservar as propriedades da amostra original (Ruiz; Pascual, 2002). Outro ponto relevante apontado por Ruiz e Pascual, é que apesar dos retornos serem, normalmente, não-correlacionados, eles não são independentes, a volatilidade se concentra em períodos específicos, o que também foi especificado por Mandelbrot (2006) em seu livro "Misbehavior of Markets", além de apontar que os mercados possuem uma dependência de longo prazo.

Para lidar com isso pode-se utilizar o *bootstrap* em blocos, que ao invés de retirar amostras de forma aleatória, retira-se blocos de dados da amostra original, dessa forma não são tirados dados únicos de forma aleatória, mas sim partes do conjunto original, como descrito por Horowitz (2001), o que mantém as possíveis dependências entre os períodos analisados, o que não aconteceria caso o *bootstrap* simples fosse aplicado.

Gallopo (2010) realizou os testes entre a TMP e TPMP e afirma que o processo resultante, utilizando o *bootstrap* como método de reamostragem, é mais estável e produz portfólios otimizados mais confiáveis, já que levam em consideração as diferentes formas em que os mercados poderão performar. Ele também afirma que esse processo reduz os erros de estimações, ao se aplicar os modelos de otimização de portfólio. Spitznegel (2021) utiliza o *bootstrap* como forma de evitar o empirismo ingênuo, analisando outras possibilidades além daquela que já ocorreu na história. Além disso, ele também aponta o método como sendo não-paramétrico, evitando quaisquer suposições sobre distribuição da amostra.

Um ponto relevante é a quantidade de amostras necessárias para se obter melhores resultados. O *bootstrap* possui dois tipos de erros, o erro de simulação ou Monte Carlo pode ser compreendido como a sequência dos elementos das amostras, a média de uma amostra de 100 elementos poderá variar, se comparado com outra amostra com a mesma quantidade de elementos, justamente por conta da diferença de elementos dentro de uma mesma amostra. O outro tipo de erro é inerente ao *bootstrap* e depende do número de elementos da amostra inicial, àquele em que outras N amostras são extraídas. Zoubir e Iskander (2007) Especificam que uma simples regra é utilizar um número de 1.000 amostras quando um intervalo de confiança de 95% é buscado. Wehrens, Putter e Buydens (2000) também corrobora com essa quantidade, dizendo que para um número de 1.000 amostras, o erro de Monte Carlo é pequeno e aceitável. O tamanho do bloco selecionado para o *bootstrap* também irá influenciar os resultados, sendo que deve ser maior, caso o tamanho da amostra também o seja. Algumas regras mencionadas no trabalho de Horowitz (2001), mencionam que deverão ser pelo menos de n^r em que $r = 1/3$ para estimação do viés da amostra.

3 Metodologia

Foram analisados seis diferentes métodos de otimização de portfólios, compostos por 10 ativos. Os primeiros critérios de otimização, máximo Índice de Sharpe (MS) e mínima variância (MV), levaram em consideração a TMP, sendo eles separados apenas pela seleção dentre àqueles estabelecidos pela fronteira eficiente. O terceiro critério esteve ligado à TPMP, buscando o portfólio de menor semivariância para dada RMA (SV). O quarto foi a MMG e o quinto a MMG fracionada em 50% (MMGF), significando que metade do montante foi investido no portfólio otimizado por MMG, enquanto o restante foi investido em um ativo livre de risco. Por fim, o último foi composto por um portfólio com pesos iguais para todos os ativos selecionados (PE), sem utilizar quaisquer modelos para seleção de um portfólio eficiente.

3.1 Teoria moderna de portfólios

Para se aplicar a MV na criação de um portfólio, é necessário o cálculo do retorno (μ) e variância (σ^2) dos ativos, sendo diretamente influenciados pela porcentagem alocada em cada um deles (W) e sua matriz de covariância (Q). Para o cálculo dessas variáveis, tem-se:

$$\begin{aligned} \mu Portf &= \mu^T W \\ \sigma^2 Portf &= W^T Q W \end{aligned} \quad (2)$$

Dessa forma, é possível estabelecer a fronteira eficiente de portfólios, mas ainda é necessário selecionar uma dessas possibilidades. Para solucionar esse problema serão analisadas duas possibilidades:

a) a seleção daquela composição de ativos que ofereça o maior Índice de Sharpe, uma medida de retorno ajustado ao risco, que considera o retorno do portfólio (caracterizado por sua média), a taxa livre de risco (R_f) e o desvio padrão do portfólio

$$Índice\ de\ Sharpe = \frac{\mu^T W - Rf}{\sqrt{W^T Q W}} \quad (2)$$

b) a seleção da carteira de mínima variância, sendo aquela que deva oferecer o menor nível de risco ao investidor, dentre as diferentes possibilidades de alocações entre os ativos.

3.2 Teoria pós-moderna de portfólios

Para se estabelecer um portfólio sob a TPMP, é necessário levar em consideração a semivariância dos retornos negativos. Ela pode ser calculada pela magnitude dos retornos (Ri) abaixo da RMA, para um dado número de observações (n). Assim, tem-se:

$$SV_p = \frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{n} [min(r_i - RMA, 0)]^2 \quad (3)$$

Nesse caso, é possível notar como a matriz de semicovariância seria afetada pela alteração de pesos nos ativos do portfólio. Uma carteira que possua 50% no ativo A e 50% no ativo B teria um portfólio em que determinados períodos possuem retornos negativos, mas alterando a proporção para 10% no ativo A e 90% no ativo B, os retornos do portfólio, que uma vez eram negativos, poderiam passar a ser positivos e vice-versa. Por conta disso, com o aumento do poder computacional, para cada porcentagem alocada nos ativos selecionados, os retornos do portfólio final foram calculados e fizeram com que fosse possível encontrar a semivariância da carteira, sem que houvesse um cálculo anterior da matriz de semicovariância. Para outras informações sobre esse problema, Estrada (2007) especifica uma maneira de se aproximar a semicovariância definida de forma matemática.

3.3 Maximização da média geométrica

Para o cálculo da média geométrica dos retornos (Ri) ao fim de N períodos tem-se:

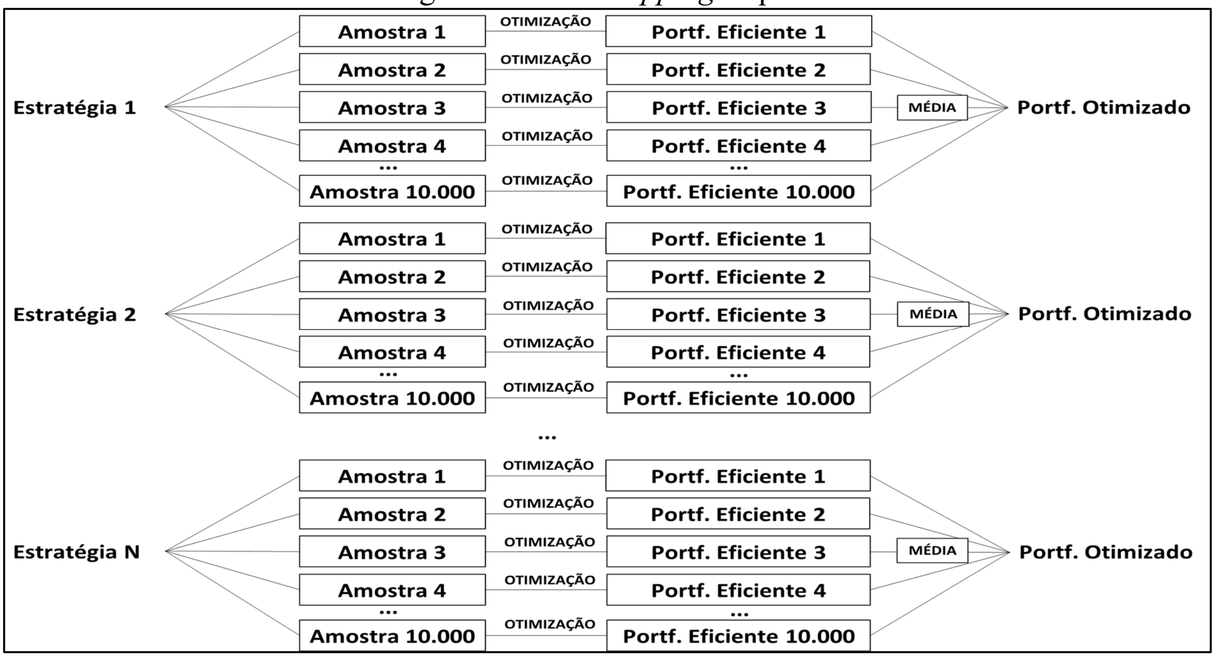
$$MG = e^{\frac{\sum_{i=1}^{N} \ln(Mi)}{N}} \quad (4)$$

Assim, é possível selecionar dentro os diferentes portfólios, aquele que apresenta a maior média geométrica. Apesar do portfólio de MMG ser uma opção válida, uma outra possibilidade é a investir apenas uma porcentagem de seu capital no portfólio otimizado pela MMG, ou seja, estabelecer uma estratégia fracionária. Dessa forma, uma quantia $1 - f$, onde f é a fração investida no portfólio de MMG, deve ser investida em um ativo livre de risco, diminuindo sua exposição e risco de perda de capital.

3.4 Aspectos gerais

As otimizações foram feitas com uso do *bootstrap* em blocos, utilizando como ferramenta a linguagem de programação Python. A iteração foi composta de 10.000 diferentes amostradas, sendo que cada uma contém 300 retornos, retirados aleatoriamente dos dados históricos em forma de blocos contendo 10 retornos. Para cada amostra, foram calculados os portfólios eficientes, sob ótica de cada estratégia, e a porcentagem destinada a cada ativo. Ao fim, uma média dos pesos de cada portfólio eficiente foi calculada, obtendo o portfólio otimizado. O diagrama abaixa representa o funcionamento iterativo da análise.

Figura 1 – *Bootstrapping* esquematizado



Fonte: dados da pesquisa

As carteiras foram otimizadas levando em consideração 10 ações do índice IBrX 100 de setores distintos, selecionadas de forma aleatória, tendo como única restrição ter sido listada na B3 antes de 2007, para que seja possível levar em consideração seu comportamento na crise de 2008. A lista de ações selecionadas pode ser encontrada abaixo.

Tabela 1 – Ativos selecionados

Ação	Setor	Participação IBrX (%)	Ano Listagem
CPLE6.SA	Utilidade Pública	0,48	2002

USIM5.SA	Mats. Básicos	0,29	2001
BRFS3.SA	Cons N Básico	0,80	2000
TIMS3.SA	Telecomunicação	0,47	2005
EMBR3.SA	Bens Industriais	0,44	2001
ABEV3.SA	Cons N Cíclico	2,71	2000
TOTS3.SA	Tec.Informação	0,79	2006
PSSA3.SA	Financ e Outros	0,16	2004
LREN3.SA	Consumo Cíclico	1,13	2005
CCRO3.SA	Bens Industriais	0,63	2002

Fonte: dados da pesquisa

Para cálculo dos retornos de ativos de renda fixa, no caso da MMGF, foram utilizados os títulos de Tesouro Selic (LFT) de 2010, 2015, 2021 e 2024. Com a otimização dos portfólios, foi definido um objetivo financeiro de dez vezes o valor investido ou 9,65% a.a (RMA que será utilizada para todos os cálculos de semivariância, já que é a taxa necessária para se atingir o objetivo proposto) durante os 25 anos propostos para cada simulação. Para cada carteira foram analisadas a distribuição de suas simulações, entendendo o grau de incerteza associado a cada estratégia, foi analisada a distribuição de seus máximos *drawdowns*, tempo médio para se atingir a meta estabelecida anteriormente, além de variáveis como a variância, semivariância, *drawdown*, Índice de Sharpe, Índice de Sortino, mediana, média e média geométrica dos retornos, para cada uma das estratégias, permitindo a comparação entre as diferentes características dos portfólios propostos.

4 Análise dos Resultados

Foram extraídos dados históricos dos preços das 10 ações citadas anteriormente, tendo início em 01/05/2006 e fim em 27/05/2022, através das informações disponibilizadas pelo Yahoo Finance, enquanto os dados da LFT, também no mesmo período, foram extraídos do Tesouro Transparente. A partir da amostra dos dados mensais, outras 10.000 amostras de 300 meses foram geradas, e capitalizadas anualmente, criando-se uma amostra de 25 retornos anuais aleatórios e com reposição. Para o cálculo de otimização dos portfólios, foi utilizado um algoritmo de programação quadrática sequencial, o SLSQP (*Sequential Least Squares Programming*), de maneira a maximizar ou minimizar as funções propostas por cada teoria:

a) **MMG/MMGF**: $maximizar\ \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln{(Ri+1)}}{n}\ \ sujeito\ a\ W_i \geq 0\ e\ \sum_{i=1}^{n} W_i = 1;$

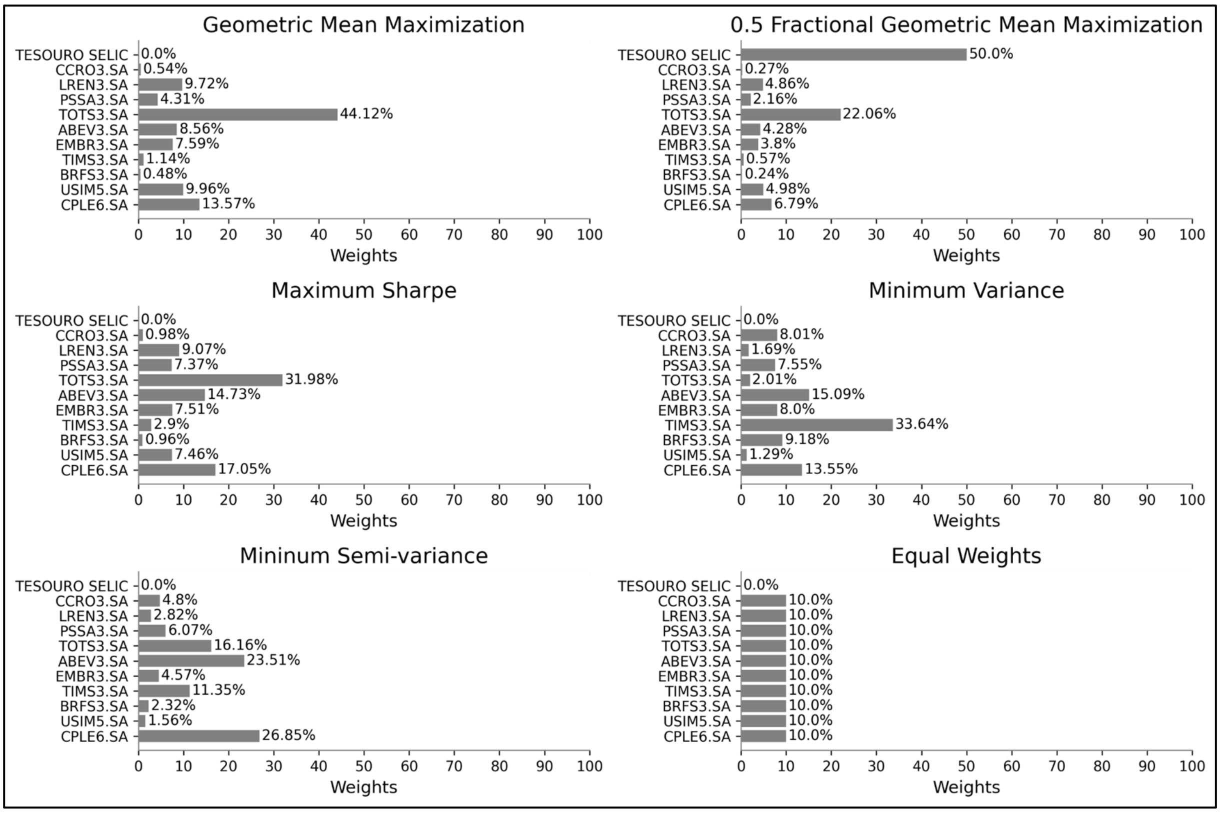
b) **MV:** $minimizar\ W^T QW\ sujeito\ a\ W_i \geq 0\ e\ \sum_{i=1}^{n} W_i = 1;$

c) **MS:** $maximizar\ \frac{\mu^T W - Rf}{\sqrt{W^T QW}}\ sujeito\ a\ W_i \geq 0\ e\ \sum_{i=1}^{n} W_i = 1;$

d) **SV:** $minimizar\ \frac{\sum_{i=1}^{n} [\min{(R_i - RMA, 0)}]^2}{n}\ sujeito\ a\ W_i \geq 0\ e\ \sum_{i=1}^{n} W_i = 1\ e\ \max \mu \geq RMA.$

Nas fórmulas apresentadas anteriormente, R_i representa Retorno do portfólio; W_i representa Porcentagem ou peso alocado ao ativo; W representa Vetor de porcentagem ou peso alocado ao ativo; Q representa Matriz de covariância e μ representa Vetor de média dos retornos dos ativos presentes no portfólio.

Figura 2 – Alocação de ativos nos portfólios otimizados



Fonte: dados da pesquisa

Primeiramente, é possível verificar que todos os portfólios possuem algum grau de diversificação, devido aos diferentes cenários aos quais foram expostas. Apesar disso, alguns portfólios possuem uma concentração relevante, se comparado aos outros, com destaque especial ao de MMG, em que dois ativos representam 57,69% do portfólio.

Dentre as diferentes estratégias, também é possível verificar que as outras possuem uma maior diversificação, em um grau bastante parecido. Dessa forma, a grande diferença entre as estratégias está nos ativos que possuem maior concentração. Enquanto a MV possui maior concentração em TIMS3, o portfólio de MS possui maior concentração em TOTS3 e o de SV em CPLE6. Outro portfólio que chama atenção é o de MMGF, em que 50% do capital é distribuído de acordo com os pesos propostos pela MMG, enquanto os outros 50% são destinados a um ativo livre de risco, nesse caso o Tesouro Selic, sendo esse o único portfólio que compõe ativos de renda fixa.

Tabela 2 – Características dos ativos

Ação	Média (%)	Mediana (%)	Média Geométrica (%)	Desvio Padrão (%)	Semi-Desvio Padrão (%)	Sharpe	Skewness	Kurtosis
CPLE6.SA	18.82	14.03	14.29	33.77	42.89	0.18	0.84	0.94
USIM5.SA	22.09	1.88	1.24	79.23	110.68	0.12	1.43	2.41
BRFS3.SA	9.59	8.16	3.61	35.03	73.01	-0.09	0.27	-0.31
TIMS3.SA	7.81	6.27	4.23	27.27	61.57	-0.18	0.27	-0.32
EMBR3.SA	14.56	6.77	4.04	52.11	80.47	0.03	1.20	2.32
ABEV3.SA	16.99	15.42	13.63	27.54	39.66	0.15	0.25	-0.27
TOTS3.SA	25.69	16.59	19.61	41.39	39.66	0.31	1.09	1.23
PSSA3.SA	15.72	12.84	11.16	32.20	51.33	0.09	0.41	-0.16

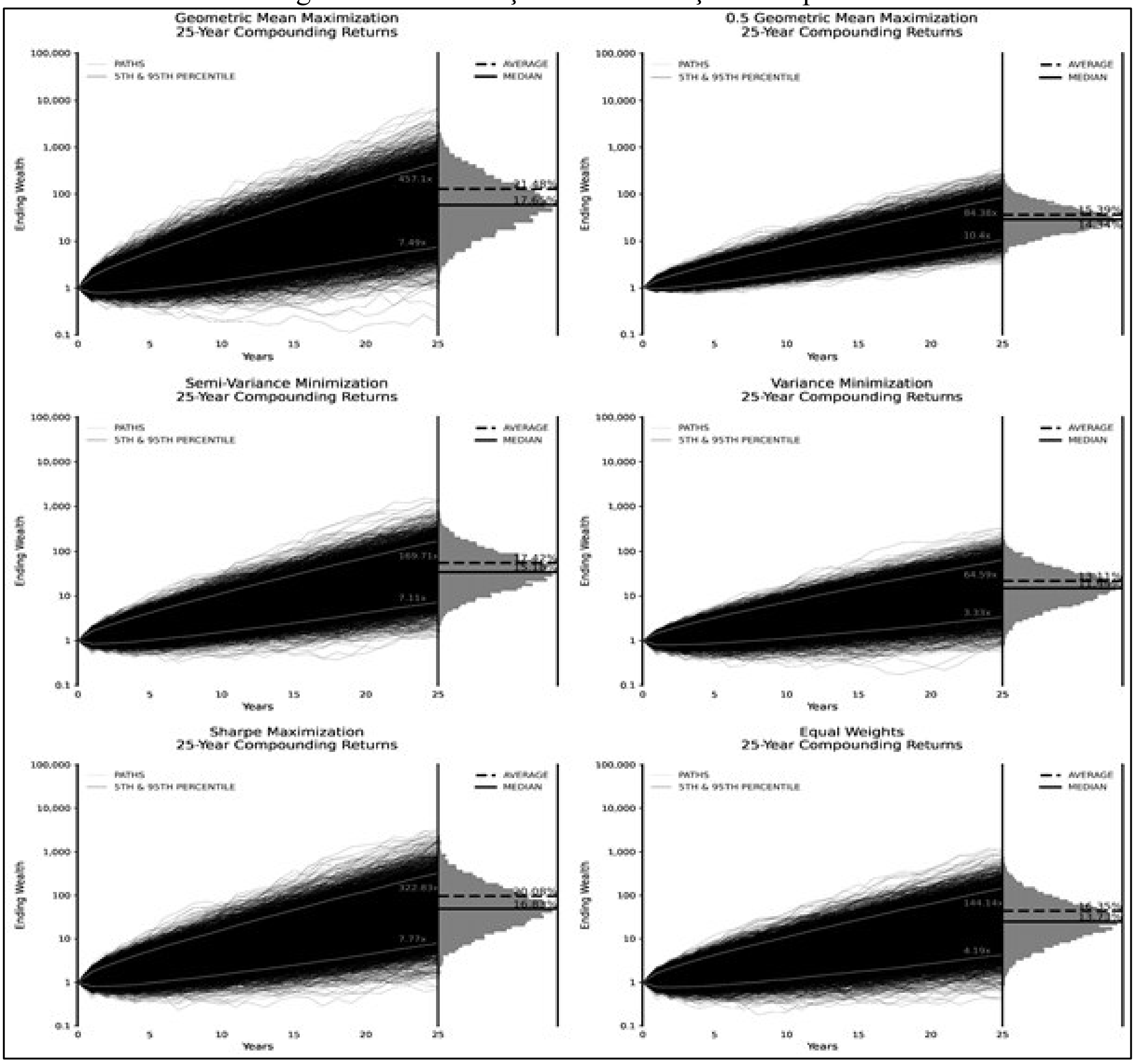
LREN3.SA	20.54	15.91	12.65	43.40	59.71	0.18	0.63	0.56
CCRO3.SA	13.20	9.18	9.06	30.76	53.20	0.01	0.55	0.08
T. SELIC	9.29	9.57	9.26	2.55	6.32	-1.36	-0.41	-0.50

Fonte: dados da pesquisa

As características dos ativos também poderão ser utilizadas para compreender a razão da alocação entre as estratégias. É possível perceber que o portfólio de MMG, possui maior concentração naqueles ativos que por si só, possuem maior média geométrica. Da mesma forma, os ativos do portfólio de MV possuem os menores desvios padrões, ativos de MS possuem os maiores índices de Sharpe e os ativos de SV as menores semivariâncias, o que está de acordo com o que cada teoria busca maximizar ou minimizar.

Com os portfólios otimizados em mãos, é possível verificar a distribuição do montante investido ao final do período de cada amostra:

Figura 3 – Distribuição da acumulação de capital



Fonte: dados da pesquisa

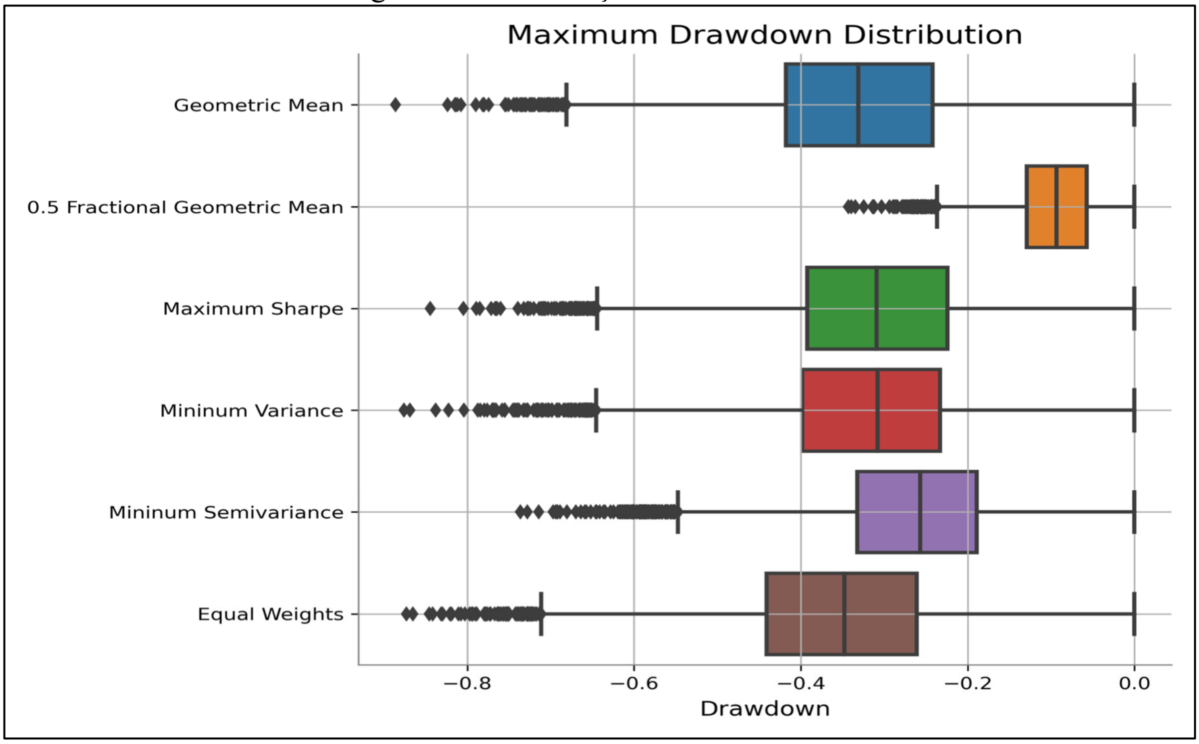
A amplitude de possibilidades se torna visível entre as diferentes estratégias, sendo possível verificar o grau de incerteza de cada uma. Como verificado por Carta e Conversano

(2020) e Estrada (2009), o portfólio de MMG pode ser uma estratégia bastante arriscada, fazendo com que o capital do investidor possa atingir níveis muito baixos, ao mesmo tempo que aumenta a probabilidade de que se atinjam níveis de riqueza maiores, se comparado a outras estratégias. É possível visualizar essa afirmação ao analisarmos o nonagésimo quinto percentil da distribuição, equivalente a 457,1x o capital inicial ou 27,76% a.a, uma taxa que permitirá dobrar o capital em aproximadamente 3 anos.

Ao mesmo tempo, podemos verificar que a estratégia que protege o investidor da melhor forma, é a de MMGF, possibilitando ao investidor uma distribuição mais controlada dos possíveis resultados. O quinto percentil da distribuição apresenta uma possibilidade de valorização de 10,4x ou 9,82% a.a, sendo o maior dentre as 6 estratégias empregadas, enquanto o nonagésimo quinto percentil supera o mesmo percentil da estratégia de MV, sendo ela de 85,47x ou 19,47%.

A distribuição dos *drawdowns* também é relevante para análise de risco dos diferentes portfólios. Com ela, é possível visualizar, de maneira mais fácil, que a estratégia com distribuição mais controlada é a de MMGF, o que já era esperado devido a sua alocação em renda fixa. Em sequência, o portfólio mais eficiente em evitar *drawdowns* consideráveis é o de SV, compactuando com a crítica de Rom e Ferguson (1993), em que o desvio padrão é uma medida ruim para mensuração do risco, já que no gráfico acima, os maiores *drawdowns* estão presentes na estratégia de MV, praticamente o mesmo nível do portfólio de MS.

Figura 4 – Distribuição do Máximo *Drawdown*



Fonte: dados da pesquisa

Também é possível verificar que o portfólio de MMG, com exceção do portfólio de PE, possui os maiores *drawdowns* dentre todas as estratégias, reforçando as críticas de Samuelson (1979) com relação a afirmação de que a estratégia levará o investidor a um montante superior a qualquer outra de forma “quase” certa.

Tabela 3 - Tempo médio para atingir 10x o capital investido

Portfólio	Probabilidade (%)	Tempo Médio (Anos)
MMG	93.87	14.42
Frac MMG	95.95	17.57
Min Var	70.51	18.46
Min Semivar	91.47	16.19
Max Sharpe	93.33	14.91
Equal Weights	83.59	16.58

Fonte: dados da pesquisa

Analisando um objetivo proposto de multiplicar o capital em 10x, dentro de 25 anos, é possível perceber que a estratégia com maior chance de atingi-lo, é a de MMGF, seguida da MMG padrão, que atinge o objetivo em um tempo médio menor, cerca de 3 anos antes, assim como o de MS. É relevante destacar que, o portfólio de SV foi otimizado para este objetivo, levando uma RMA de 9,65% que ao ser capitalizada em 25 anos traria um retorno de 10x o capital inicial, teve um resultado bastante chamativo, mesmo que outras estratégias tenham a superado por uma pequena margem. Quando esse objetivo é estendido e passa a ser de 100x, os resultados mudam drasticamente:

Tabela 4 – Probabilidade de atingir 100x o capital investido

Portfólio	Probabilidade (%)	Tempo Médio (Anos)
MMG	34.37	21.31
Frac MMG	2.84	23.67
Min Var	1.46	23.66
Min Semivar	14.21	22.68
Max Sharpe	28.03	21.80
Equal Weights	10.51	22.59

Fonte: dados da pesquisa

Agora, a estratégia de MMGF não possui a mesma taxa de sucesso, sendo uma das menores, pouco acima da estratégia de MV, com o maior tempo médio para se atingir o objetivo proposto, ao mesmo tempo que a MMG padrão possui a maior taxa de sucesso e menor tempo médio, tal qual sua proposta inicial, seguido do portfólio de MS, que também conta com número expressivos. A comparação entre o portfólio de MV e SV pode ser feita novamente, já que o primeiro apresenta uma taxa de sucesso muito inferior ao segundo, que aliado a distribuição dos *drawdowns*, vistos anteriormente, permitem inferir que a SV é uma estratégia superior a MV, ao levar-se em consideração a possibilidade de perda de capital e crescimento do montante investido.

O portfólio de PE também se mostrou mais promissor se comparado ao de MV, tanto no objetivo de 100x o capital inicial, quanto o de 10x, tendo uma taxa de sucesso e tempo médio inferiores. Apesar disso, a distribuição dos *drawdowns* de MV se mostraram mais controlados do que a de PE. Além dos objetivos propostos, é possível verificar a probabilidade de perder determinada porcentagem do capital investido, para cada um dos portfólios. Abaixo serão analisados casos em que 20% do capital foi perdido e casos em que 50% foi perdido, uma situação mais grave.

Tabela 5 – Probabilidade de perder 20% do capital investido

Portfólio	Probabilidade (%)	Tempo Médio (Anos)
MMG	12.98	2.60
Frac MMG	0.13	2.85
Min Var	14.52	3.04
Min Semivar	8.39	2.38
Max Sharpe	11.37	2.52
Equal Weights	15.90	2.99

Fonte: dados da pesquisa

É possível verificar que a estratégia de PE possui a maior chance de perder essa porcentagem de capital, ocorrendo em um tempo médio de três anos. Apesar disso, todas as estratégias possuem valores similares, não tão distantes uns dos outros, com exceção da estratégia de MMGF, que em apenas 0,13% das vezes, apresentou uma perda dessa proporção.

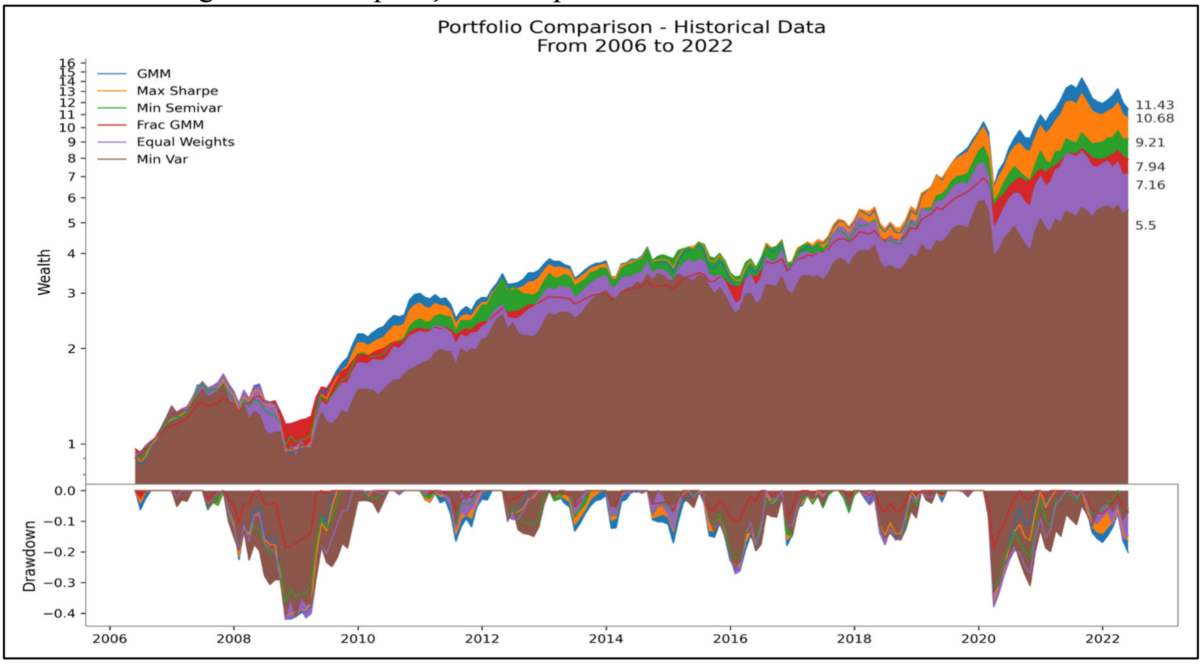
Tabela 6 – Probabilidade de perder 50% do capital investido

Portfólio	Probabilidade (%)	Tempo Médio (Anos)
MMG	1.00	4.90
Frac MMG	0.00	0
Min Var	1.20	6.27
Min Semivar	0.28	5.64
Max Sharpe	0.75	5.01
Equal Weights	1.68	5.43

Fonte: dados da pesquisa

Os resultados não tiveram muita alteração, se comparados a perda de 20% de capital. A estratégia de PE continua superando as outras, na probabilidade de perda do capital investido. Um ponto relevante a ser considerado é que a estratégia de SV apresenta o menor risco de perda do montante investido inicialmente, se comparada com todas as outras estratégias, com exceção da MMG fracionada, mostrando-se novamente eficaz na redução do risco de perda.

Figura 5 – Comparação entre portfólios utilizando dados históricos



Fonte: dados da pesquisa

Quando esses portfólios são aplicados aos dados históricos, é possível visualizar as informações que foram extraídas e discutidas nos tópicos anteriores. O portfólio de MMG atingiu o maior acúmulo de capital, próximo ao de MS. Em sequência, tem-se o portfólio de SV e MMGF, com *drawdowns* mais controlados e um retorno muito próximo entre si. Por fim, a estratégia de MV obteve um resultado inferior ao de PE, com *drawdows* próximos entre si, mas superiores aos de outras estratégias.

As métricas relevantes de cada um dos portfólios otimizados para cada uma das 10.000 simulações estão apresentadas abaixo:

Tabela 7 – Estatísticas das Estratégias – 10.000 Simulações

Portfólio	Média (%)	Mediana (%)	Média Geométrica (%)	Desvio Padrão (%)	Semi-Desvio Padrão (%)	Sharpe	Sortino
MMG	21.53	16.91	17.80	30.53	32.12	0.28	0.49
Frac MMG	15.41	13.10	14.45	15.01	15.88	0.16	0.47
Min Var	13.18	13.74	11.43	19.26	31.85	0.03	0.17
Min Semivar	17.48	15.45	15.31	22.54	27.22	0.20	0.39
Max Sharpe	20.14	16.69	17.04	27.42	30.08	0.26	0.46
Equal Weights	16.50	15.23	13.83	24.54	33.98	0.15	0.28

Fonte: dados da pesquisa

5 Considerações Finais

Existem diversas maneiras para se definir a alocação de um portfólio de ativos, todas possuem um pilar teórico que busca explicar o objetivo da estratégia e como o investidor poderá atingi-lo. Entre as teorias, a mais difundida e praticada é a TMP com o portfólio de MV e MS, enquanto outras como a TPMP e a MMG não possuem tanta visibilidade, o que se torna ainda mais surpreendente quando a comparação entre elas é feita, já que o portfólio de MV é o que possui o pior desempenho para dado nível de risco, de acordo com os índices de Sharpe e Sortino, além do intervalo de 95% entre as 10.000 simulações apresentar os piores resultados, mostrando-se inferior a uma estratégia de alocação que não exige nenhum esforço ou pensamento, como a de PE, alinhado com o trabalho de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009).

Em contrapartida, a estratégia que mostrou a menor probabilidade de perda de capital e incerteza com relação ao atingimento do objetivo proposto foi a estratégia de MMGF, que obteve destaque tanto em seu intervalo de confiança, apresentando o menor quinto percentil dentre todas as estratégias e apresentando uma distribuição de retornos mais estreita, garantindo maiores chances de atingirmos o objetivo proposto, sendo a estratégia de maior índice de Sortino, além de apresentar uma taxa de retorno equiparável ou superior as demais estratégias, com exceção de MMG e MS, que sacrificam uma maior previsibilidade dos resultados, em busca de taxas de retorno maiores.

A comparação entre os diferentes portfólios foi essencial para que os investidores possam entender o desempenho e incertezas aliados a cada estratégia. Com base nos resultados, é possível verificar que, como citado anteriormente, o portfólio de MV deve ser evitado, já que existem soluções com performances superiores. Como alternativa a esse portfólio, o uso da semivariância e RMA pela TPMP criou o portfólio de SV, que apesar de mostrar desempenho superior ao de MV, ainda não se mostrou a melhor solução, nem para o atingimento da RMA proposta pelo investidor, nem para maximização dos retornos.

As melhores soluções aos investidores são os portfólios de MMG ou MMGF, o primeiro apresentando a maior taxa de retorno possível, que apesar de próximo ao de MS, ainda foi superior, e o segundo apresentando a menor possibilidade de perda de capital e maior probabilidade de atingimento da RMA. Assim, caberia ao investidor decidir qual das duas estratégias está mais alinhada aos seus objetivos, podendo buscar diferentes níveis de fracionamento para ajustar o desempenho e risco aceitáveis ao seu perfil.

Este trabalho é essencial para que o investidor possa conhecer a evolução da teoria de portfólios, as propostas e problemas com cada uma delas. Com uma análise robusta, utilizando o *bootstrap* junto de diversas medidas de risco e retorno, é o único que se propõe a comparar essas diferentes teorias e portfólios, que usualmente apenas possuem estudos singulares em que o método de pesquisa pode divergir entre autores, tornando a tarefa de comparação entre os portfólios algo ineficaz e complexo, auxiliando investidores e acadêmicos.

Para futuros trabalhos, seria interessante a análise mais minuciosa entre os portfólios de MMGF, junto de diferentes títulos de renda fixa. Além disso, a aplicação de um rebalanceamento periódico poderá ser relevante, já que poderá influenciar os resultados obtidos. Por fim, as simulações poderão ser realizadas entre diferentes grupos de 10 ativos, assim, evita-se quaisquer particularidades inerentes ao portfólio formado, aumentando a robustez da análise.

Referências

BERNOULLI, D. Exposition of a new theory on the measurement of risk. **Econometrica**, [*s.l.*], v. 22, n. 1, p. 23-36, 1954.

BREIMAN, L. Optimal gambling system for favorable games. **Review of the International Statistical Institute**, [*s.l.*], v. 1, n. 1, p. 273-293, 1969.

BRUCE, P.; BRUCE, A. **Estatística prática para cientistas de dados**. Rio de Janeiro: Alta Books, 2019.

CARTA, A; CONVERSANO, C. Practical implementation of the Kelly Criterion: optimal growth rate, number of trades, and rebalancing frequency for equity portfolios. **Frontiers in Applied Mathematics and Statistics**, [*s.l.*], v. 6, p. 1-15, 2020.

CHOPRA, V. K.; ZIEMBA, W. T. The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. **Journal of Portfolio Management**, [*s.l.*], v. 19, n. 2, p. 6-11, 1993.

DEMIGUEL, V.; GARLAPPI, L.; UPPAL, R. Optimal versus naive diversification: how inefficient is the 1/N portfolio strategy?. **The Review of Financial Studies**, [*s.l.*], v. 22, n. 5, p. 1915-1953, 2009

EFRON. B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. **The Annals of Statistics**, [*s.l.*], v. 7, n. 1, p. 1-26, jan. 1979.

ESTRADA, J. Mean-semivariance optimization: a heuristic approach. **Journal of Applied Finance**, [*s.l.*], v. 18, n. 1, p. 57-72, 2020.

ESTRADA, J. Geometric mean maximization: an overlook portfolio approach?. **The Journal of Investing Winter**, [*s.l.*], v. 19, n. 4, p. 134-147, 2010.

GALLOPO, A. Comparison of pre and post modern portfolio theory using resampling. **Global Journal of Business Research**, [*s.l.*], v. 4, n. 1, p. 1-16, 2010.

GEAMBASU, C.; SOVA, R.; IULIA, J.; GEAMBASU, L. Risk measurement in post-modern portfolio theory: differences from modern portfolio theory. **Academy of Economic Studies**, [*s.l.*], v. 47, n. 1, p. 113-132, 2013.

HOROWITZ, J. L. The bootstrap. *In*: HECKMAN, J. J.; LEAMER, E. (eds.). **Handbook of econometrics**. Amsterdan: Elsevier, 2001. v. 5. p. 3159-3228.

KELLY JR, J. L. A new interpretation of the information rate. **Bell System Technical Journal**, [*s.l.*], v. 35, n. 4, p. 917-926, 1956.

LATANÉ, H. Criteria for choice among risky ventures. **Journal of Political Economy**, [*s.l.*], v. 67, n. 2, p. 144-155, 1959.

LEIPPOLD, M. Value-at-risk and other risk measures. *In*: BAKER, H. K.; FILBECK, G. (eds.). **Investment risk management**. Oxford: Oxford University Press, 2015. p. 283-303.

MACLEAN, L. C.; THORP, E. O.; ZHAO, Y.; ZIEMBA, W. T. Medium term simulations of Kelly and fractional Kelly and proportional betting strategies. *In*: MACLEAN, L. C.; THORP, E. O.; ZIEMBA, W. T. **The Kelly capital growth investment criterion**. New Jersey: World Scientific, 2011. p. 543-561.

MANDELBROT, B; TALEB, N. N. Mild vs. wild randomness: focusing on those risks that matter. *In*: DIEBOLD, F. X.; DOHERTY, N. A.; HERING, R. J. **The known, the unknown, and the unknowable in financial risk management**. Princeton: Princeton University Press, 2010. p. 47-58.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, [*s.l.*], v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.

MARKOWITZ, H. **Portfolio selection:** efficient diversification of investment. New York: John Wiley & Sons, 1959.

NÓBREGA, M. B; MACHADO, M. A. V. Análise da eficácia da variância e de medidas Downside Risk para formação de carteiras. **Enfoque Reflexão Contábil**, Maringá, v. 35, n. 3, p. 33-51, set. 2016.

OMISORE, I; YUSUF, M; CHRISTOPHER, N. The modern portfolio theory as an investment decision tool. **Journal of Accounting and Taxation**, [*s.l.*], v. 4, n. 2, p. 19-28, 2012.

ROM, B. M; FERGUSON, K. W. Post-modern portfolio theory comes of age. **The Journal of Investing Winter**, [*s.l.*], v. 2, n. 4, p. 27-33, 1993.

RUIZ, E.; PASCUAL, L. Bootstrapping financial time series. **Journal of Economic Surveys**, [*s.l.*], v. 16, n. 3, p. 271-300, 2002.

SAMUELSON, P. A. The "fallacy" of maximizing the geometric mean in log sequences of investing or gambling. **Proceedings National Academy of Science**, [*s.l.*], v. 68, n. 10, p. 2493-2496, 1971.

SAMUELSON, P. A. Why we should not make mean log of wealth big though years to act are long. **Journal of Banking and Finance**, [*s.l.*], v. 3, n. 4, p. 305-307, 1979.

SORTINO, F; SATCHELL, S. **Managing downside risk in financial markets**. Woburn: Butterworth-Heinemann. 2001.

SHARPE, W. F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. **Journal of Finance**, [*s.l.*], v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.

SHARPE, W. F. Mutual fund performance. **The Journal of Business**, [*s.l.*], v. 39, n. 1, p. 119-138. 1966.

SPITZNEGEL, M. **Safe haven:** investing for financial storms. New Jersey: Wiley, 2021.

THORP, E. O.; WHITLEY, R. Concave utilities are distinguished by their optimal strategies. *In*: COLLOQUIA MATHEMATICA SOCIETATIS JANOS BOLYAI, 5., 1972, Budapest. **Proceedings** […]. Amsterdam: North Holland Publishing, 1972. p. 813-830.

THORP, E. O. Understanding the Kelly criterion. *In*: MACLEAN, L. C.; THORP, E. O.; ZIEMBA, W. T. **The Kelly capital growth investment criterion**. New Jersey: World Scientific, 2011. p. 509-523.

WEHRENS, R; PUTTER, H; BUYDENS, L. M. C. The bootstrap: a tutorial. **Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems**, [*s.l.*], v. 54, n. 1, p. 35-52, 2000.

ZOUBIR, A. M; ISKANDLER, D. R. Bootstrap methods and applications. **IEEE Signal Processing Magazine**, [*s.l.*], v. 24, n. 4, p. 10-19, jul. 2007.