

MODELAGEM E TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II: UM ESTUDO DE CASO COM ESTUDANTES DE AGRONOMIA

Giselle Moraes Resende Pereira¹

Danilo Elias de Oliveira²

Arlindo José de Souza Junior³

RESUMO: Este artigo apresenta os resultados de uma pesquisa aplicada, cujos dados empíricos foram obtidos de uma experiência pedagógica usando Modelagem na Educação e Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) com estudantes de um Curso de Graduação em Agronomia da Universidade Federal de Uberlândia. Esse estudo foi norteado pela busca de resposta ao seguinte questionamento: quais as contribuições do desenvolvimento de uma proposta de Trabalho de Projeto que inseriu Modelagem Matemática e TDIC para ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral II no curso de Agronomia? Foi realizado um estudo de caso qualitativo com cinco estudantes do curso a partir do projeto sobre a cultura da cebolinha. Fez-se uso de dados experimentais realizados pelos estudantes para direcionar o ensino de alguns conteúdos da disciplina: ‘Máximos e Mínimos’ de Funções de duas variáveis reais e Método dos Multiplicadores de Lagrange. A pesquisa demonstrou que o projeto permitiu-lhes aprimorar conhecimentos sobre esses conteúdos e inteirar-se do processo requerido na pesquisa. As contribuições do Projeto para os estudantes envolveram questões relacionadas à produção de saberes e conhecimentos individuais e coletivos, à Modelagem Matemática, à Agronomia, às TDIC e aos processos interativos. Este Projeto teve potencial de instigar certo querer – saber – aprender e contribuiu à apropriação e ao aperfeiçoamento sobre a linguagem matemática, científica e tecnológica dos estudantes.

PALAVRAS-CHAVE: Cálculo Diferencial e Integral; Modelagem Matemática; Tecnologias Digitais.

ABSTRACT: This article presents the results of an applied research whose empirical data was obtained from a pedagogical experience carried out by using Modeling in Education and Digital Technologies of Information and Communication (TDIC) with students from an Undergraduate Agronomy Course at the Federal University of Uberlândia. This study aimed to answer the following question: what are the contributions of developing a proposal of Project Work that integrates Mathematical Modelling and TDICs to teach and learn the Differential and Integral Calculus II in the Agronomy course? A qualitative study was carried out with five students from the course based on a project about the culture of green onions. Experimental data used by the students was used to direct the teaching of some contents of the discipline: ‘Maximum

¹ Doutora em Educação pela Universidade Federal de Uberlândia. Professora do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Uberlândia. Av. João Naves de Avila – 2121, Bloco 1F, 34 3239-4126. gisellemoraes@ufu.br

² Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas. Professor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Uberlândia. Av. João Naves de Avila – 2121, Bloco 1F, 34 3239-4126. daniloelias@ufu.br

³ Doutor em Educação pela Universidade Estadual de Campinas. Professor titular do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Uberlândia. Av. João Naves de Avila – 2121, Bloco 1F, 34 3230-9456. arlindo@ufu.br

and Minimum' of Functions of two real variables and the Lagrange Multipliers Method. The research showed that the project made it possible for the students to improve their knowledge about these contents and know the process required in the research. The contributions of the project to the students involved issues related to the production of knowledge and individual and collective knowledge to Mathematical Modelling, Agronomy, TDICs and the interactive processes. This project had the potential of instigating a certain want – know how – to learn and contributed to the appropriation and improvement of the students' mathematical, scientific, and technological language.

KEYWORDS: Differential and Integral Calculus; Mathematical Modeling; Digital Technologies.

INTRODUÇÃO

Neste artigo apresentamos parte de uma pesquisa de doutorado (Pereira, 2019) cujos dados empíricos foram coletados através de uma proposta de Trabalho de Projeto. Esta proposta integrou a Modelagem Matemática e as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, destinada aos estudantes do curso de Graduação em Agronomia da Universidade Federal de Uberlândia (UFU).

Esta pesquisa de cunho qualitativo pauta-se pelo seguinte questionamento: quais as contribuições do desenvolvimento de uma proposta de Trabalho de Projeto que inseriu Modelagem Matemática e TDIC para ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral II no curso de Agronomia?

O presente artigo buscou investigar as contribuições alcançadas no desenvolvimento da proposta para ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral II, a partir do projeto de um dos grupos de estudantes sobre a cultura da cebolinha. Nesta proposta, os estudantes, reunidos em grupos, fizeram projetos sobre temas/assuntos da Agronomia de interesse deles, a partir das etapas envolvidas na Modelagem, para direcionar o ensino de conteúdos do programa curricular da disciplina, e, paralelamente, orientar a pesquisa com princípios científico e educativo.

O que se espera é que, conhecendo melhor as contribuições do desenvolvimento de uma proposta que envolveu Modelagem Matemática e TDIC na área de Ciências Agrárias, seja possível a criação de estratégias para contribuir com a melhoria do ensino de Cálculo Diferencial e Integral, por meio de ações que possam abolir a imagem fria e sem aplicabilidade da Matemática aos olhos de muitos jovens e adultos universitários, sobretudo dos estudantes dos cursos de Ciências Agrárias, como o de Agronomia.

As pesquisas teóricas desempenham um papel importante no avanço do conhecimento em diversas áreas. Elas buscam explorar, analisar e aprofundar questões relevantes, contribuindo para o desenvolvimento científico e acadêmico. O estudo foi do tipo estudo de caso, de natureza qualitativa, e foi realizado por meio da técnica de observação, de dados do projeto e de entrevista com alguns dos estudantes matriculados na disciplina.

Freitas e Jabbour (2011) afirmam que a pesquisa do tipo estudo de caso é uma estratégia capaz de permitir a coleta de informações detalhadas e sistemáticas sobre um fenômeno específico. A entrevista é um procedimento de coleta de informações sobre um tema científico específico, conduzida por iniciativa do entrevistador, com o objetivo de fornecer dados relevantes para um objeto de pesquisa (Minayo, 2002). A técnica de observação, por sua vez, insere o pesquisador no contexto estudado, permitindo uma compreensão mais profunda da complexidade do fenômeno (Zanelli, 2002). Além disso, as conversas informais realizadas durante a pesquisa podem revelar evidências que não seriam perceptíveis apenas pela análise de documentos e pela observação.

Para aumentar a credibilidade e a confiabilidade dos resultados, é recomendável realizar um mapeamento de pesquisas relacionadas ao tema, a fim de corroborar e valorizar as evidências provenientes desta investigação (Martins, 2008; Yin, 2005). Para o tratamento e a análise dos dados coletados, foi realizada uma revisão bibliográfica de livros e artigos selecionados sobre Modelagem Matemática, TDIC e Trabalho de Projetos.

É importante destacar que esta pesquisa possui limitações, pois se trata de um recorte feito em um trabalho desenvolvido por um grupo de estudantes, e os resultados podem estar sujeitos a vieses de respostas por parte dos participantes. No entanto, em nossa análise, buscamos mitigar possíveis distorções. Apesar das limitações, acredita-se que o estudo oferece contribuições significativas para o ensino de Cálculo⁴ por meio de projetos de Modelagem Matemática e das Tecnologias Digitais, que destacaremos neste artigo.

MODELAGEM NA EDUCAÇÃO: BREVE PANORAMA

A Modelagem na Educação, como ‘auxílio’ no ensino, especialmente na disciplina de Matemática, passou a ser defendida desde os anos de 1970, em particular, por professores universitários que atuavam em disciplinas de Cálculo (Biembengut, 2016). Desde então, um movimento a favor dessa tendência na Educação Matemática vem se consolidando entre os

⁴ A partir deste momento utilizaremos a palavra Cálculo para se referir ao Cálculo Diferencial e Integral.

estudiosos, pesquisadores e professores, com a intenção de desenvolver o ensino da Matemática de forma efetiva nos mais diversos níveis.

Baseado na compreensão e nos entendimentos produzidos por esses interessados, por meio de suas produções, experiências e vivências, pode-se dizer que a Modelagem não tem uma orientação única. Em essência, o que torna a Modelagem na Educação Matemática tão fascinante é a existência de uma multiplicidade de orientações, sobretudo pelo reconhecimento de que há muito por aprender sobre esse meio de se educar matematicamente. É nesse sentido que Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) propõem “uma Modelagem que esteja a serviço da aprendizagem da Matemática” (Meyer, Caldeira, Malheiros, 2011, p. 85), por meio do não julgamento ou categorização das visões de Modelagem existentes na literatura.

Há diversas concepções de Modelagem Matemática na Educação, contudo, elas convergem ao entendimento de que na Educação a Modelagem propicia experiências que levam o/a estudante a querer saber. Nesta pesquisa destacamos a concepção de Biembengut (2016) para a Modelagem na Educação por afinidade e aproximação de propósitos. Para Biembengut (2016, p. 186), a Modelagem na Educação (Modelação) é entendida como método de ensino com pesquisa, ou seja, “orienta-se pelo ensino do conteúdo curricular da disciplina (e não curricular) a partir de um tema/assunto e, paralelamente, pela orientação dos estudantes à pesquisa – modelagem”, nos limites e espaços escolares.

Esta pesquisa, “Modelagem e Tecnologias Digitais no ensino de Cálculo Diferencial e Integral II: um estudo de caso com estudantes de Agronomia” abrange, também, as possibilidades de práticas educativas sobre as TDIC no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral (Flores; Lima; Müller, 2018; Marin, 2009; Pereira; Seki; Palharini; Neto; Silva; Damin; Martins, 2017; Souza Junior, 1993; Souza Junior, 2000). E, ainda, abarca as possíveis relações entre Modelagem Matemática, entendida como enfoque pedagógico, e Pedagogia de Projetos, no contexto da Educação Matemática.

A respeito dessas relações, Malheiros (2007) apresenta algumas conjecturas entre essas duas estratégias pedagógicas e acredita na existência de interseções e afastamentos, dependendo da perspectiva de Modelagem adotada. Para a autora, a principal diferença da Pedagogia de Projetos e Modelagem encontra-se na presença ou não da Matemática. Segundo a autora, “em um projeto a Matemática pode estar presente, mas na Modelagem ela deve estar presente” (Malheiros, 2007, p. 12).

Dessa forma, quando o fazer Modelagem – aqui subentendido com a atuação da

Matemática – se integrar ao desenvolvimento de um projeto, presenciaremos a convergência dessas duas estratégias pedagógicas, culminando nos Projetos de Modelagem (Meyer, Caldeira, Malheiros, 2011).

A seguir, apresentamos resultados de um Projeto desenvolvido por um dos grupos de estudantes sobre o cultivo da cebolinha.

ESTUDO DE CASO

Esta pesquisa, de cunho qualitativo, ocorreu no primeiro semestre letivo de 2017, em uma turma de estudantes do Curso de Graduação em Agronomia da Universidade Federal de Uberlândia, Campus Monte Carmelo, matriculados na disciplina Matemática II, que aborda em essência os conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral II. Mais especificadamente, trata dos conteúdos: Funções reais de duas variáveis, Máximos e Mínimos de Funções de duas variáveis, Integrais Múltiplas, Equações Diferenciais de primeira ordem e Matrizes e Sistemas Lineares.

Fundamentados nos conceitos de Modelagem Matemática na Educação, foi desenvolvido um Projeto com 50 estudantes, reunidos em grupos, sobre temas/assuntos da Agronomia de interesse deles, visando estimular a percepção-apreensão, a compreensão-explicitação e a significação-expressão dos estudantes. A partir da pesquisa realizada pelos grupos e dos respectivos dados obtidos, por meio da realização de experimentos, o professor direcionou cada projeto, através de fichas-guias para o ensino de alguns conteúdos do programa curricular da disciplina, e, paralelamente, pela orientação à pesquisa.

A pesquisa, aqui, é entendida como algo que “requer conhecimento do assunto de que se está tratando e das teorias e técnicas que possam subsidiar o que se pretende melhor entender e, assim, criar ou propor algo” (Biembengut, 2016, p. 173), ou seja, seu propósito vai além do levantamento e cópia de dados e informações. Portanto, neste estudo, entendemos o ensino com pesquisa como uma sequência de momentos de aprendizagem que requer dos estudantes preparação, envolvimento e produção, superando o recebimento passivo de conhecimento e oportunizando-lhes a participação no processo de ensino e aprendizagem como sujeitos produtores de conhecimento.

Após a apresentação da proposta à turma e da formação dos grupos, cada grupo definiu uma ‘cultura’ para a realização do experimento. Essa definição ocorreu depois de discussões internas e/ou com a participação do professor. Dos dez grupos, sete culturas diferentes foram escolhidas pelos estudantes. Nesta pesquisa, apresentamos o Projeto sobre

a cultura da cebolinha, desenvolvido por um grupo de 5 estudantes. Os estudantes serão identificados no decorrer da discussão como A_i ($i=1, \dots, 5$), como forma de garantir o anonimato e o sigilo em relação às suas identidades.

Este artigo teve como objetivo investigar as contribuições desta proposta para os estudantes dos cursos da área de Ciências Agrárias. O projeto foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa com o número de Registro CAAE 59116416.9.0000.5152. A pesquisa foi realizada nas dependências da UFU, campus Monte Carmelo. O estudo foi conduzido pelos pesquisadores, sendo que um deles era o professor responsável pela disciplina.

As entrevistas, com perguntas abertas, foram gravadas em vídeo e áudio, transcritas e suas respostas discutidas com a intuito de entender a percepção dos estudantes sobre o trabalho de projeto desenvolvido no viés da Modelagem Matemática e das Tecnologias Digitais. Os resultados obtidos fornecem informações importantes sobre a percepção dos estudantes em relação à Matemática, em especial ao Cálculo.

Os estudantes realizaram seus experimentos seguindo as orientações do professor. Na atividade experimental, além da escolha da cultura, os grupos teriam que escolher dois elementos variáveis que influenciariam no seu desenvolvimento (dois parâmetros), por exemplo, a quantidade de água e a quantidade de fertilizante.

Os valores obtidos foram apresentados ao professor da disciplina por meio de um relatório, no qual os grupos apresentaram uma tabela com resultados semelhantes ao Quadro 1 a seguir, onde $z(x,y)$ são os resultados observados a partir do experimento:

Quadro 1 – Apresentação da organização dos dados dos experimentos.

Parâmetros		Parâmetro 2 (y)		
		y_0	y_1	y_2
Parâmetro 1 (x)	x_0	$z(0,0)$	$z(0,1)$	$z(0,2)$
	x_1	$z(1,0)$	$z(1,1)$	$z(1,2)$
	x_2	$z(2,0)$	$z(2,1)$	$z(2,2)$

Fonte: Registros do professor.

O conteúdo das fichas foi selecionado pelo professor, com o objetivo principal de ensinar os conceitos de máximos e mínimos de funções de duas variáveis, com análise da matriz Hessiana e com a aplicação do Teorema de Weierstrass, e o Método dos Multiplicadores de Lagrange.

Esses estudantes, ainda em fase de formação como pesquisadores, foram os responsáveis pela coleta dos dados através de experimentos. A intenção de fazer com que os estudantes produzissem seus dados foi propiciar a eles fazer o percurso da pesquisa, as

etapas, desde a preparação, a obtenção dos dados até a descrição e análise, posteriormente. Dessa forma, o objetivo ultrapassa a ideia de conseguir inteirá-los quanto a um assunto das Ciências Agrárias e de apreender melhor a teoria e as aplicações matemáticas.

A realização de experimentos permitiu padronizar o conteúdo a ser abordado e apresentado nas fichas-guia, minimizando assim possíveis problemas com o docente em relação à insuficiência de tempo para orientar os grupos de estudantes.

Apesar de atividades experimentais serem muito comuns aos estudantes de Agronomia, para a maioria dos estudantes da turma acompanhada (de segundo período), essa foi à primeira experiência com experimentos no curso. Dessa forma, os estudantes foram orientados a planejar e executar os experimentos e buscar auxílio, se necessário, com professores do campus, profissionais da área, ou com os estudantes de períodos mais avançados.

Na apresentação da proposta aos estudantes, foi entregue um Guia com a intenção de auxiliá-los na realização do estudo proposto. Fundamentado em Biembengut (2014; 2016), cada grupo seguiria algumas etapas presentes nesse Guia para desenvolver um modelo aplicado às Ciências Agrárias.

Os grupos de estudantes foram orientados a utilizar *softwares*, matemáticos e/ou não matemáticos, para auxiliá-los nos projetos. A escolha foi livre entre os grupos, contudo, observamos que os grupos optaram por aplicativos que o professor da disciplina usava e/ou já tinha mencionado em algum momento em sala de aula, como os *softwares* GeoGebra, Excel e ferramentas disponíveis *online*, como o *WolframAlpha*.

As datas de entrega das etapas foram agendadas na plataforma Moodle, que também serviu como suporte para atividades, materiais de apoio e comunicação, facilitando a colaboração entre estudantes e professor. Os grupos realizaram suas respectivas pesquisas extraclasse e participaram de reuniões com o professor responsável durante o desenvolvimento dos projetos. Cada grupo, com suas especificidades, vivenciou o processo de pesquisa e, posteriormente, socializou os resultados com a turma por meio de seminários. Essa socialização permitiu compartilhar conhecimentos e despertou em outros estudantes o desejo de querer, saber e aprender (Biembengut, 2016).

A seguir, apresentamos a experiência realizada pelo grupo de estudantes, que escolheu a cultura da cebolinha e as variáveis – quantidade de água (ml) e tempo de exposição à luz solar (h) para acompanhamento.

PROJETO: CULTIVO DE CEBOLINHA

O processo de escolha da cultura pelos grupos para a realização da atividade experimental foi fundamental. Os grupos tiveram que optar por culturas de bom desenvolvimento a fim de obter uma quantidade suficiente de dados e dar continuidade aos trabalhos.

A escolha da cultura da cebolinha pelo grupo de estudantes desta pesquisa foi motivada pelo curto ciclo de cultivo e rápido desenvolvimento. No caso desse grupo, foi realizado um experimento onde foram plantadas mudas de cebolinhas em 9 garrafas PET (politereftalato de etileno) previamente cortadas na altura de 20 cm. Nelas, foi colocada uma porção de esterco bovino curtido com a terra vermelha. As mudas de cebolinha, com 10 cm de comprimento, foram transplantadas para cada garrafa.

Cada garrafa recebeu uma combinação diferente das quantidades de água (40 ml, 60 ml ou 80 ml) e de radiação solar direta (4 horas, 8 horas e 12 horas). O grupo acompanhou o experimento por 3 semanas, período após o qual foi realizada a medição final da altura das plantas com o auxílio de uma régua de 30 cm.

O experimento foi realizado na casa de um dos estudantes, onde estes se revezavam para irrigar as plantas durante o acompanhamento do experimento, deixando três plantas em uma região da casa onde elas estavam expostas a 12 horas de sol por dia, outras três plantas em uma região onde estavam expostas a 8 horas de sol por dia, e outras três plantas expostas a 4 horas de sol por dia, conforme a Figura 1.

Figura 1 – Acompanhamento do experimento do grupo.



Fonte: Relatório do grupo.

Considerando o plantio das mudas com 10 cm de comprimento no início do experimento, os estudantes consideraram o crescimento real (C_r) a partir da diferença entre a medição final (M_f) da altura das plantas e o tamanho da muda transplantadas nas garrafas PET. Ou seja, $C_r = M_f - 10$.

Na sequência, apresentamos na Figura 2 os resultados obtidos pelo grupo de estudantes ao final do experimento com a cultura da cebolinha.

Figura 2 – Resultados obtidos e delineamento do experimento do grupo.

CEBOLINHA		
4 HRS DE SOL	8 HRS DE SOL	12 HRS DE SOL
80 ML DE ÁGUA 31 CM	80 ML DE ÁGUA 33,5 CM	80 ML DE ÁGUA 23,5 CM
60 ML DE ÁGUA 29,5 CM	60 ML DE ÁGUA 27,5 CM	60 ML DE ÁGUA 20 CM
40 ML DE ÁGUA 21 CM	40 ML DE ÁGUA 23 CM	40 ML DE ÁGUA 14 CM

Fonte: Relatório do grupo.

A partir desses resultados, os dados foram aproximados por uma função de duas variáveis do tipo parabolóide de rotação: $f(x, y) = a(x - x^*)^2 + a(y - y^*)^2 + c$.

O *Maple* foi o *software* utilizado para obter as funções. O cálculo dos valores de a e c foram realizados com o seguinte algoritmo implementado no *Maple* (Quadro 2):

Quadro 2 – Algoritmo implementado no *Maple* para obter as funções.

1	Escolha de um ponto (x^*, y^*) que seria o ponto máximo (vértice) desse parabolóide. Foi definido que y^* seria igual à y_1 , porém x^* diferente de x_0 , x_1 e x_2 ;
2	Estimativa do valor de $z(x^*, y^*)$;
3	Estimativa de valores $z(x^*, 0)$ e $z(x^*, 2)$;
4	Cálculo do polinômio interpolador de grau 2 em y , denominado $P_2(y)$, sobre os pontos $(y_0, z(x^*, 0))$, $(y^*, z(x^*, y^*))$ e $(y_2, z(x^*, 2))$;
5	O termo linear do polinômio $P_2(y)$ foi desconsiderado (para que não aparecesse um termo $\sqrt{x^2 + y^2}$ na expressão de $f(x, y)$). Assim, $P_2(y)$ foi reescrito como sendo $P_2(y) = ay^2 + c$;
6	Rotação de $P_2(y)$ em torno do eixo z substituindo y por $\sqrt{x^2 + y^2}$. Dessa forma, foi construído o polinômio $P_2(x, y)$;
7	Translação de $P_2(x, y)$ com as seguintes substituições na expressão de $P_2(x, y)$: $x \rightarrow (x - x^*)$ e $y \rightarrow (y - y^*)$;
8	$f(x, y) = P_2(x, y) = a(x - x^*)^2 + a(y - y^*)^2 + c$.

Fonte: Registros do professor.

Vale ressaltar que o Projeto desenvolvido nesta pesquisa teve continuidade em

semestres posteriores (no mesmo formato ou reformulado). Entretanto, foi utilizado outro *software* – o *software* R (*software* gratuito para elaboração de gráficos e computação estatística). Isso pois existe um comando no *software* R que, dado um conjunto de pontos (sejam bi ou tridimensionais) e a estrutura da função (duas ou três variáveis), o próprio *software* obtém uma função que se aproxima desses dados.

Após análise dos dados apresentados no projeto desenvolvido pelo grupo de estudantes sobre a cultura da cebolinha, a função polinomial de duas variáveis encontrada (utilizando o algoritmo) foi:

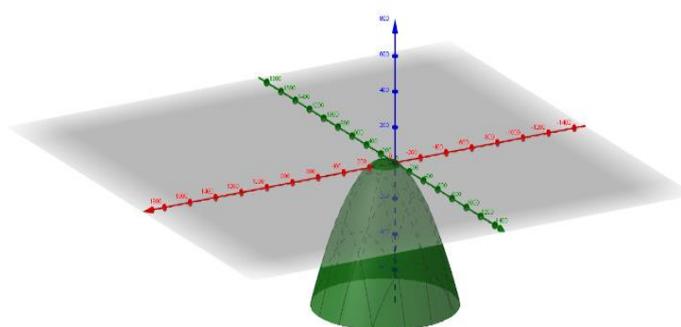
$$f(x, y) = -0,003125x^2 + 0,5x - 0,003125y^2 + 0,0296875y + 14,4295$$

em que x representava a quantidade de água (ml) utilizada na rega dessas plantas e y representava o período de exposição ao sol (h).

A partir dessa função, os estudantes buscaram pela representação do gráfico, para encontrar e classificar o ponto crítico, determinar o maior valor assumido, encontrar o maior e menor valor assumido em uma região fornecida, além de encontrar o máximo dessa função restrita a uma função do primeiro grau, denominada função restrição, utilizando os Multiplicadores de Lagrange.

O grupo de estudantes evidenciado nesta pesquisa utilizou o *Geogebra* para construir o gráfico da função polinomial de duas variáveis. O gráfico exposto pelo grupo no relatório final está representado a seguir, na Figura 3:

Figura 3 – Gráfico da função obtida.



Fonte: Relatório do grupo.

Essa etapa ajudou-os a identificar que a superfície de sua função era um parabolóide elíptico. Além disso, ao verificar quando as derivadas parciais se anulavam, os estudantes encontraram como ponto crítico $(x, y) = (80,4.75)$ e, ao analisar o determinante da matriz Hessiana, verificaram que $H(80,4.75) = 0,0000390625 > 0$ com $\partial^2 f / \partial x^2 = -0,00625 < 0$, sendo, portanto, $(x, y) = (80,4.75)$ um ponto de máximo da função. Na

sequência, ao substituir esse ponto na expressão da função, encontraram $f(80,4.75) = 34.5$ como o maior valor assumido pela função.

O próximo passo do grupo consistiu em encontrar o maior e menor valor que a função assumiria no triângulo fornecido, de vértices $A(70,4)$, $B(80,4)$ e $C(80,6)$. Trata-se de uma aplicação do Teorema de Weierstrass, então os estudantes tiveram que buscar pelos valores extremos nos pontos do interior do triângulo, em que as derivadas parciais se anulam, e nos pontos localizados na fronteira do triângulo.

Após realizarem seus cálculos, os estudantes avaliaram os possíveis pontos candidatos a máximos e mínimos e relataram suas conclusões, conforme a Figura 4:

Figura 4 – Análise dos pontos encontrados pelo grupo.

(x,y)	Posição	F(x;y)
(80;6)	Vértice	f(80;6)
(80;4)	Vértice	f(80;4)
(70;4)	Vértice	f(70;4)
(80;4)	Fronteira	f(80;4)
(75,91346154; 5,18269231)	Fronteira	f(75,91346154; 5,18269231)
(80;4,75)	Fronteira	f(80;4,75)

Fonte: Relatório do grupo.

Por fim, uma função restrição foi criada de forma a simular um cenário em que se desejava pagar a água utilizada na irrigação e a energia de uma lâmpada que simula a luz solar (variáveis definidas pelo grupo), com um limite fixo de dinheiro, e obter o maior crescimento possível das cebolinhas: *“Sabendo que o custo de 1ml de água na rega das plantas é de R\$1,00, o custo de 1 hora de exposição a uma lâmpada que simula a luz solar é R\$5,00 e que dispomos de R\$100,00 para gastar entre água e exposição a luz, qual a combinação ideal de água e exposição a luz que devemos comprar para obtermos o maior comprimento da parte aérea das cebolinhas?”*.

Para descobrir os valores de grandezas que maximizam/minimizam certa quantidade, é comum que existam vínculos entre elas. Embora muitas vezes seja possível eliminar algumas variáveis usando as relações de vínculo, é também frequente que os vínculos sejam representados por funções complicadas, e a eliminação não seja possível ou adequada. O método alternativo é o dos multiplicadores de Lagrange. Assumindo a função $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$, em que $g(x, y) = x + 5y - 100 = 0$ é a função de vínculo entre as variáveis x e y , os estudantes utilizaram o Método dos Multiplicadores de Lagrange para encontrar x e y tais que $\nabla L = 0$ e concluíram que a combinação ideal de água (ml) e

exposição à luz solar (h) para um melhor desempenho na altura das cebolinhas, atendendo às condições impostas na questão, era de $x = 79,8$ ml e $y = 4,03$ h.

Cada ficha de grupo foi adaptada para a sala de aula, ajudando os estudantes a entenderem os conteúdos da disciplina de forma prática. No caso do problema de otimização restrito, o professor não utilizou dados reais em sua elaboração, mas procurou se aproximar deles. A partir do experimento e da função polinomial de duas variáveis utilizada, os resultados apontam que o melhor desenvolvimento da cebolinha ocorreu com 80 ml de água e 4,75 h de exposição à luz solar, ou seja, com 80 ml de água e 5 horas e 25 minutos de exposição à luz solar. E, sob algumas condições, utilizando o Método dos Multiplicadores de Lagrange, os resultados apontam o melhor desenvolvimento das cebolinhas com 79,8 ml de água e 4,03 horas de exposição à luz solar, isto é, com 4 horas e 1 minuto e 48 segundos de exposição à luz solar.

As resoluções obtidas foram apresentadas aos demais estudantes e ao professor da disciplina por meio de seminários e relatórios finais. Os seminários se tornaram momentos ricos de questionamentos coletivos, promovendo interações presenciais entre os estudantes dentro dos grupos e entre os grupos e o professor. Nesses momentos, observamos o cuidado dos estudantes ao adaptar a linguagem de suas pesquisas, especialmente em relação a temas técnicos da Agronomia, para torná-la compreensível aos outros estudantes.

Para o dia da apresentação dos seminários, o professor preparou algumas perguntas para os grupos. Essas perguntas foram feitas para aqueles grupos que não mencionaram tais questões no momento da apresentação. Um resumo com algumas das perguntas elaboradas pelo professor para os grupos encontra-se no Quadro 3, a seguir.

Quadro 3 – Questões elaboradas pelo professor para o dia das apresentações.

Qual o nome deste gráfico?
Qual o domínio de $f(x,y)$?
Qual a interseção do gráfico com o plano xz ? E com o plano yz ?
Este ponto de máximo é absoluto ou relativo?
Qual seria a classificação do ponto crítico se tivéssemos $H(x,y) < 0$?
O que deveria acontecer para que o ponto crítico pudesse ser classificado como “mínimo”?
Desenhe o vetor gradiente de $f(x,y)$.
Encontre a expressão de uma curva de nível de $f(x,y)$.
Qual a expressão da curva de nível $z = 5$? (Utilizar outro valor para z , se necessário. Passar a expressão de $f(x,y)$ simplificada, se preciso.)
Calcule as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de $f(x,y)$. (Caso o grupo não tenha especificado o cálculo destas derivadas.)

Se o ponto crítico estivesse no interior (fora) do triângulo, qual seria o ponto de máximo? E o ponto de mínimo?

Fonte: Registros do professor.

Na etapa de validação, o professor esclareceu que, embora os estudantes tenham realizado um experimento, nem todos os desdobramentos dessa fase poderiam ser concluídos devido à limitação de tempo. No entanto, consideramos que essa etapa foi contemplada por meio de análises, ainda que superficiais, das respostas obtidas, baseadas nos questionamentos do professor durante os seminários e nas interações entre os membros dos grupos.

Os estudantes se mostraram interessados com essa aplicação da Matemática na Agronomia e alguns questionaram sobre outras situações em que poderiam utilizar não apenas esse, mas também outros conceitos de Matemática. Destacaram também que situação semelhante à da ficha-guia poderia acontecer na futura atuação profissional deles, na qual o cliente propõe um problema da vida real e o estudante, futuro agrônomo, algumas vezes teria que realizar um experimento, simplificar o problema, escrevê-lo numa linguagem matemática, buscar uma solução (aproximada), analisar os resultados obtidos e verificar se eram válidos matematicamente e socialmente. Além disso, se a solução não fosse aceitável, seria necessário repetir o processo até que se encontrasse uma solução naturalmente ou socialmente válida.

A avaliação dos projetos seguiu uma lógica seletiva e formativa, abrangendo todo o processo de desenvolvimento. Foram considerados a qualidade dos questionamentos, a profundidade da pesquisa, o planejamento e execução dos experimentos, a interpretação dos dados, a adequação das soluções e a apresentação oral e escrita. A pontuação final da disciplina foi distribuída entre o desenvolvimento do experimento, a apresentação do seminário e a avaliação do relatório final, além de analisar o empenho individual e coletivo, a participação, o espírito colaborativo e o processo de produção.

Acreditamos que a dinâmica da disciplina com o Projeto, utilizando métodos avaliativos diversificados, foi não apenas rica no contexto educacional, mas também atrativa para os estudantes. Isso fez com que os pontos do Trabalho de Projeto fossem uma motivação, mas não a única. Envolveram questões relacionadas à produção de saberes e conhecimentos individuais e coletivos, à Modelagem, à Matemática, à Agronomia, às TDIC e a processos interativos.

Os processos interativos no desenvolvimento de um Trabalho de Projeto tiveram

como principais agentes os grupos de estudantes e suas ações em produção coletiva. Os processos interativos proporcionados pelas TDIC no Trabalho de Projeto envolvem a interação entre pessoas, mediada pelas tecnologias, e a interatividade, que ocorre quando a comunicação se dá entre pessoas e máquinas (Belloni, 2002; Lopes, 2019; Tonus, 2007; Torrezan; Behar, 2009).

A seguir apresentamos na Figura 5 o processo de construção do conhecimento por meio da interatividade e da interação oportunizadas pelo Trabalho de Projeto.

Figura 5 – Interação e interatividade na construção do conhecimento por meio do Trabalho de Projeto.



Fonte: Os autores

Ao acompanhar o movimento para a construção do conhecimento, verificamos que esses foram evidenciados por meio da interação presencial entre aluno e aluno (no grupo ou com a turma), sobretudo na realização dos experimentos, entre aluno e professor/pesquisador, entre aluno e pessoas externas (professores do Curso de Agronomia, por exemplo, e/ou entre aluno e pessoas externas à Universidade – produtores rurais, familiares, etc.) e por meio da interação mediada pelas tecnologias, entre aluno, computador e professor ou entre aluno, celular, aluno/pesquisadora, bem como na interatividade entre aluno/professor e computador/celular.

Além disso, acreditamos que as TDIC contribuíram para o desenvolvimento do Trabalho de Projeto de três maneiras distintas. A primeira estava relacionada ao processo de constituição da disciplina, envolvendo a criação de um ambiente para a disciplina com o

Projeto no *Moodle*; a segunda ocorreu por meio do processo de modelagem dos dados e na elaboração e resolução das fichas-guias com a utilização dos *softwares* por estudantes e professor; e a terceira se referiu ao processo comunicativo entre os envolvidos, por meio do aplicativo *WhatsApp Messenger*, de *e-mails*, etc.

A utilização dos *softwares* potencializou os movimentos de interatividade e de interação no Trabalho de Projeto, atuando principalmente no processo de modelagem dos dados, na elaboração das fichas orientadoras e na sua compreensão e resolução pelos estudantes (interatividade), além de na busca de ajuda para a utilização dos *softwares* (interação presencial ou mediada).

Compreendemos também que a utilização do *WhatsApp* esteve relacionada à interação mediada pelas tecnologias (entre aluno, celular, aluno/pesquisadora), aproximando os estudantes, algumas vezes possibilitando a comunicação em tempo real, e se apresentaram como possibilidade para o desenvolvimento dos projetos, trazendo flexibilidade temporal e espacial, o que favoreceu diversas formas de interação entre as pessoas, refletindo na aprendizagem dos estudantes.

Dessa forma, consideramos que, em diferentes intensidades, o contexto virtual ou tecnológico emergiu em todas as etapas do Trabalho de Projeto. Mais ainda, acreditamos que esses meios foram fundamentais no processo de construção do conhecimento, processo ilustrado pelas setas na Figura 5, que mostram as contribuições e trocas, tendo o aluno enquanto sujeito produtor desse processo.

No patamar da produção de saberes e conhecimentos envolvendo a Modelagem Matemática, alguns comentários e as produções dos estudantes participantes desta pesquisa deixaram transparecer que a Modelagem Matemática desenvolveu habilidades, aprimorou conhecimentos e despertou o interesse pelo estudo, pela pesquisa, sobretudo no depoimento do estudante a seguir:

[...] eu nem imaginava que a Modelagem Matemática existia, então a Matemática para mim era um grande problema. Além de dificuldade, eu não sentia prazer em estudar Matemática, o que foi o grande ponto. Por não ter prazer, eu não estudava. [...] Me mostrou que além de resolver problemas da nossa área, também pode ser um diferencial para nós no mercado de trabalho.
(Estudante A4, entrevista gravada)

O Estudante A4 destacou que a Modelagem Matemática, via Trabalho de Projeto, associada à resolução de problemas para a área agrônômica, oportunizou uma experiência

para a turma que pode ser considerada um diferencial no mercado de trabalho.

Alves (2017) defende que a implementação de propostas educativas pode ser realizada através da práxis criadora da Modelagem Matemática. Ele vê a práxis como a interação entre reflexão e ação, não apenas como teoria ou prática isoladas. Essa práxis transforma a consciência e só faz sentido quando o ser humano altera a realidade por meio de suas ações.

Ao questionarmos sobre as contribuições do Projeto, especialmente para a formação dos estudantes em Agronomia, destacou-se a importância das experiências proporcionadas por atividades direcionadas à área logo no início do curso. Isso foi evidenciado na fala de um estudante do grupo, conforme depreendemos a seguir:

Experiência. Antes de plantar alguma coisa, eu vou fazer aquilo lá pra ver o melhor resultado que eu vou ter (Estudante A3, entrevista gravada).

Outro aspecto refere-se à mudança de pensamento sobre a Matemática enquanto área do saber.

Foi ver que a Matemática era outra coisa, que a Matemática não é só cálculo e tal, que dá pra colocar a Matemática em tudo. Porque eu sempre me fiz essa pergunta: para que eu vou usar a Matemática? [...] Mas foi um desafio e eu encarei. (Estudante A2, entrevista gravada)

Questões sobre a aplicabilidade da Matemática e a necessidade de aprendê-la são comuns entre alunos de todos os níveis. Quando essas perguntas não são respondidas, podem gerar sentimentos negativos. No entanto, com o Trabalho de Projeto desenvolvido, observamos mudanças nas concepções dos alunos. Relatos de superação indicam que o Projeto teve um impacto positivo, justificando todos os esforços empenhados.

O Projeto desenvolvido proporcionou aos estudantes uma experiência diferenciada na disciplina, como apreendemos na fala que segue:

Eu ganhei muito aprendizado! Porque se fosse para estudar aquelas matérias, eu não estudava. Esses projetos forçam o estudo, ainda mais em grupo [...] um força o outro, fazer papel de pesquisador (Estudante A1, entrevista gravada, grifos nossos).

O Estudante A1 relacionou o ganho de muito aprendizado com a dinâmica adotada nessa disciplina, ressaltou a importância do trabalho ter sido desenvolvido em grupo como

motivação para o estudo e ainda destacou o papel de pesquisador que ele e seus colegas desempenharam com o Trabalho de Projeto.

Assim, de maneira similar à pesquisa de Souza Junior (2000), pensamos que, ao propor que os estudantes desenvolvessem os projetos, o professor passou a trabalhar o ensino com pesquisa na universidade – como uma sequência de momentos de aprendizagem que oportuniza a participação dos estudantes no processo de ensino e aprendizagem como sujeitos produtores de conhecimento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise dos dados desta pesquisa indicou que, ao propor o desenvolvimento de projetos pelos estudantes com a atividade experimental, o professor integrou ensino, pesquisa e extensão na universidade, com princípios científicos e educativos. As contribuições do Projeto para os estudantes envolveram a produção de saberes e conhecimentos individuais e coletivos, Modelagem Matemática, Agronomia, TDIC e processos interativos.

A partir dos dados experimentais obtidos pelos estudantes, as fichas-guia direcionaram o ensino de Máximos e Mínimos de Funções de duas variáveis reais e do Método dos Multiplicadores de Lagrange. O acompanhamento do grupo de estudantes que desenvolveu o projeto sobre a cultura da cebolinha mostrou que o melhor desenvolvimento das cebolinhas ocorreu com 79,8 ml de água e 4,03 horas de exposição à luz solar, a partir do Método dos Multiplicadores de Lagrange. Os resultados observados pelos estudantes, a resolução das fichas-guia, as considerações do grupo sobre o processo da pesquisa vivenciada foram apresentados aos demais estudantes e ao professor da disciplina na forma de seminário, expressando momentos ricos de questionamentos e produção coletiva ao instigar, em alguns outros estudantes, certo querer – saber – aprender.

A experiência realizada com este grupo de estudantes nos proporcionou a oportunidade de oferecer a eles uma primeira imersão no processo de pesquisa no curso de Agronomia. Neste estudo, o desenvolvimento do Projeto, em que se utilizou TDIC e Modelagem para ensinar e aprender Cálculo, possibilitou que estudantes e professor produzissem, no seu cotidiano, saberes e conhecimentos.

Entendemos que os estudantes precisaram explorar diferentes contextos, realizar diversas análises matemáticas, agronômicas, tecnológicas, etc., emitir opiniões e produzir

conhecimentos que possibilitam a outros desenvolverem ou aprimorarem seus próprios saberes. As tecnologias digitais atuaram nos processos de constituição da disciplina com Projetos; no processo de modelagem dos dados, elaboração e resolução das fichas orientadoras (*softwares*) e no processo comunicativo entre os envolvidos. A Modelagem, por sua vez, aprimorou conhecimentos, despertou o interesse pela investigação e propiciou a autoria dos estudantes.

O percurso acompanhado nesta pesquisa nos permite concluir que as informações e as tecnologias digitais utilizadas foram selecionadas por meio de processos interativos. O processo de construção do conhecimento ocorreu por meio da interatividade e das interações presencial e mediada oportunizadas pelo Trabalho de Projeto. O uso de ferramentas tecnológicas na educação facilitou o ensino e aprendizagem, tornando-o mais prático e ágil.

Refletimos que o Trabalho de Projeto proposto aos alunos requereu envolvimento, preparação e criação e teve o potencial de propiciar o entusiasmo e interesse dos estudantes pelos conteúdos do Cálculo, levando-os a perceber que esses são meios importantes para a compreensão de situações inerentes ao seu curso da área Agrônômica.

Acreditamos na proposição de Projetos que integrem a Matemática aos assuntos relacionados ao curso no qual o estudante se encontra matriculado, fazendo uso das TDIC para facilitar a compreensão dos campos de conhecimentos envolvidos e, baseando-se nos conceitos de Modelagem Matemática, com pensamento, prática e linguagem, para, de modo progressivo, desenvolver habilidades, aprimorar conhecimentos e despertar o interesse pela pesquisa. Ademais, concluímos que o projeto desenvolvido contribuiu com a apropriação e ao aperfeiçoamento sobre a linguagem matemática, científica e tecnológica dos estudantes.

Decerto que ainda há um amplo campo de possibilidades para pesquisas futuras, envolvendo outras contribuições, para o ensino de Cálculo, e, por isso, recomendamos a continuidade do estudo dessa temática.

REFERÊNCIAS

ALVES, D. B. **Modelagem matemática no contexto da cultura digital**: uma perspectiva de educar pela pesquisa no curso de técnico em meio ambiente integrado ao ensino médio. 2017. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2017. DOI: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2017.14>. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/19902>. Acesso em: 2024.

BELLONI, M. L. Ensaio sobre a educação a distância no Brasil. **Educação e Sociedade**, [s. l.], v. 23, n. 78, p. 117-142, abr. 2002. DOI: <https://doi.org/10.1590/S0101-73302002000200008>. Disponível em:

<https://www.scielo.br/j/es/a/yvpWm7vFNqhpZYMtjn8kHZD/abstract/?lang=pt>. Acesso em: 2024.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na educação matemática e na ciência**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2016.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem no ensino fundamental**. Blumenau: Edifurb, 2014.

FLORES, J. B.; LIMA, V. M. R.; MÜLLER, T. J. O uso das tecnologias da informação e comunicação no ensino de cálculo diferencial e integral: reflexões a partir de uma metanálise. **Abakos**, Belo Horizonte, v. 6, n. 2, p. 21-35, 2018. DOI:

<https://doi.org/10.5752/P.2316-9451.2018v6n2p21-35>. Disponível em:

<https://periodicos.pucminas.br/index.php/abakos/article/view/16238>. Acesso em: 2024.

FREITAS, W. R. S.; JABBOUR, C. J. C. Utilizando estudo de caso(s) como estratégia de pesquisa qualitativa: boas práticas e sugestões. **Estudo & Debate**, Lajeado, v. 18, n. 2, p. 07-22, 2011. Disponível em:

<https://www.univates.br/revistas/index.php/estudoedebate/article/view/560>. Acesso em: 24 jan. 2024.

LOPES, E. M. C. **Integração de mídias na disciplina de geometria analítica em um curso de graduação em matemática**. 2019. Tese (Doutorado em Educação) –

Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019. DOI:

<https://doi.org/10.14393/ufu.te.2019.920>. Disponível em:

<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/24833>. Acesso em: 24 jan. 2024.

MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem matemática e pedagogia de projetos: possíveis interseções**. Comunicação Científica. In: IX ENEM, Belo Horizonte, p. 1-15, jul. 2007.

Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html.

Acesso em: 20 jan. 2024.

MARIN, D. **Professores de matemática que usam a tecnologia de informação e comunicação no ensino superior**. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE), Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2009. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/91117>.

Acesso em: 24 jan. 2024.

MARTINS, G. A. Estudo de caso: uma reflexão sobre a aplicabilidade em pesquisas no Brasil. **Revista de Contabilidade e Organizações**, [s. l.], v. 2, n. 2, p. 9-18, jan./abr.,

2008. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/rco/article/view/34702>. Acesso em: 24 jan. 2024.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS A. P. S. **Modelagem em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MINAYO, M. C. S. **Pesquisa Social: teoria, método e criatividade**. Petrópolis: Vozes, 2002. Disponível em: <https://wp.ufpel.edu.br/franciscovargas/files/2012/11/pesquisa-social.pdf>. Acesso em: 24 fev. 2024.

PEREIRA, G. M. R. **Cálculo diferencial e integral no curso de agronomia: uma perspectiva de trabalho de projetos com modelagem matemática e tecnologias digitais de**

informação e comunicação. 2019. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019. DOI: https://doi.org/10.14393/ufu.te.2019.2473_ Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/27813>. Acesso em: 20 jan. 2024.

PEREIRA, R. S. G.; SEKI, J. T. P.; PALHARINI, B. N.; COELHO NETO, J.; SILVA, A. C.; DAMIN, WILLIAN; MARTINS, B. O. Modelagem matemática e tecnologias digitais educacionais: possibilidades e aproximações por meio de uma revisão sistemática de literatura. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**, [s. l.], v. 8, p. 80-94, 2017. DOI: <https://doi.org/10.26843/rencima.v8i2.1214>. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1214>. Acesso em: 20 jan. 2024.

SOUZA JUNIOR, A. J. **Concepções do professor universitário sobre o ensino da matemática**. 1993. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE), Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 1993.

SOUZA JUNIOR, A. J. **Trabalho coletivo na universidade: trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender cálculo diferencial e integral**. 2000. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000. Disponível em: https://www.siarq.unicamp.br/images/SouzaJunior_ArlindoJosede_D.pdf. Acesso em: 20 jan. 2024.

TONUS, M. **Interações digitais: uma proposta de ensino de radiojornalismo por meio das TIC**. 2007. Tese (Doutorado em Multimeios) – Instituto de Artes, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007. DOI: <https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2007.434687>. Disponível em: <https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/434687>. Acesso em: 20 jan. 2024.

TORREZZAN, C. A. W.; BEHAR, P. A. Parâmetros para a construção de materiais educacionais digitais do ponto de vista do design pedagógico. *In*: BEHAR, P. A. (org.). **Modelos pedagógicos em educação a distância**. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. p. 33-65.

YIN. R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 3 ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

ZANELLI, J. C. Pesquisa qualitativa em estudos da gestão de pessoas. **Estudos da Psicologia**, [s. l.], n. 7, p. 79-88, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1590/S1413-294X2002000300009>. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/epsic/a/GdRk6zHHNz4yL6NBsH6P4yH/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 20 jan. 2024.